Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 11 domácích úkolů

Termín odevzdání: 3. ledna 2019 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
Σ	10	

Problém 1 (Na popisu polyedru záleží)**.** Najděte soustavu 20 lineárních nerovnic takových, že popisují polyedr X, který nelze popsat jako konvexní obal méně než 2^{10} bodů (tj. polyedr X má aspoň 1024 vrcholů).

Problém 2. Chceme vyřešit soustavu $(D + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro neznámý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde D je regulární *diagonální* matice $n \times n$ a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ známe. Řešení husté soustavy lineárních rovnic zabere $O(n^3)$ času, takže bychom si chtěli pomoci znalostí struktury soustavy.

a) Dokažte, že $\mathbf{x}$ řeší naši soustavu, právě když existuje t takové, že platí

$$\begin{pmatrix} D & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Vymyslete jak soustavu z předchozího bodu vyřešit v čase $O(n)$ (pro jednoduchost uvažujeme, že jedno sčítání, odčítání, násobení i dělení nás stojí jednotku času bez ohledu na velikost čísel).

Problém 3 (Pseudoinverz)**.** Máme m rovnic pro n neznámých a chceme najít přibližné řešení rovnice $Ax = b$ s nejmenší 2-normou. Budeme předpokládat $m \leq n$.

Buď A matice $m \times n$ ve tvaru $A = U\Sigma V^T$, kde Σ je zobecněná diagonální matice typu $m \times n$ s kladnými hodnotami $\sigma_1, \ldots, \sigma_m > 0$ na hlavní diagonále (tj. $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ a $\Sigma_{ij} = 0$ jinak) a U, V jsou ortogonální matice typu $m \times m$ a $n \times n$.

Definujeme pseudoinverz A jako $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$, kde $\Sigma^\dagger$ je zobecněná diagonální matice typu $n \times m$ s hodnotami $1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_m$ na hlavní diagonále. Dokažte, že vektor $\mathbf{x}^\star = A^\dagger \mathbf{b}$ je vektor s nejmenší 2-normou mezi všemi vektory, které minimalizují $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$.

Problém 4. Chceme navrhnout experiment sestávající z 1000 měření, který nám co nejpřesněji určí veličinu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Máme k dispozici dva druhy měření: První měření nám vrátí veličinu $x_1 + x_2 + w$, druhé měření vrací $2x_1 + x_2 + w$, kde w je v obou případech náhodná, normálně rozdělená chyba se střední hodnotou 0 a rozptylem 1 (hodnoty w z různých měření jsou jako obvykle stejně rozdělené nezávislé).

Kolik kterých měření máme provést, abychom minimalizovali objem konfidenčního elipsoidu? Úlohu vyřešte ručně, ne na počítači.