Konvexní optimalizace

Cvičení 9

Problém 1. Uvažme hru kámen-nůžky-(papír), která se od známé hry liší tím, že první hráč může hrát kámen, nůžky i papír, ale druhý hráč může hrát jenom kámen a nůžky. Za výhru (kámen tupí nůžky stříhají papír balí kámen) dostane hráč 1 bod, za prohru -1 bod a za remízu 0 bodů. Jaké jsou strategie optimální v nejhorším případě pro oba hráče a kolik je hodnota této hry?

Problém 2. Zformulujte následující problém (minimalizace vůči lineární mrtvé zóně) ve ekvivalentním tvaru lineárního programu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \sum_{i=1}^{m} \phi(u_i) \\ \text{za podmínek } & \mathbf{u} = A\mathbf{x} - b, \end{aligned}$$

kde $\phi(u) = 0$ pro $|u| < 1$ a $\phi(u) = |u| - 1$ jinak.

Problém 3 (Minimální řez)**.** Mějme (slabě souvislý) orientovaný graf G s hranami $E(G)$. Každá hrana má kapacitu $c_e > 0$. Značme $s(e)$ zdrojový a $t(e)$ cílový vrchol hrany e. Uvažme program (Ř) s proměnnými λ_e pro $e \in E(G)$ a ν_v pro $v \in V(G)$.

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \sum_{e \in E(G)} c_e |\lambda_e| \\ \text{za podmínek } & \nu_{t(e)} = \nu_{s(e)} + \lambda_e \quad \forall e \in E(G) \\ & \nu_0 = 1 \\ & \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \end{aligned}$$

a) (bacha analýza) Dokažte, že optimální hodnota (Ř) se nabývá.

b) Dokažte, že každé optimální řešení (Ř) splňuje $\nu_v \in [0, 1]$ pro všechna $v \in V(G)$.

c) (bacha trik) Mějme optimální řešení $(\lambda^\star, \nu^\star)$ pro (Ř). Zvolme „druhou největší“ funkční hodnotu $\nu^\star$ jako

$$a = \max\{\nu_v^\star : v \in V(G), \nu_v^\star < 1\}.$$

Předpokládejme, že $a > 0$ a zvolme $U = \{v \in V(G) : \nu_v^\star = a\}$. Dokažte, že a lze zvednout na 1, tj. existuje optimální řešení (Ř) s

$$\nu'_v = \begin{cases} 1 & v \in U \\ \nu_v^\star & \text{jinak.} \end{cases}$$

d) Dokažte s použitím předchozího bodu, že existuje optimální řešení (Ř) s $\nu_v^\star \in \{0, 1\}$ pro všechna $v \in V(G)$ (toto řešení popisuje minimální řez v G oddělující vrchol 0 od 1,2,3).