Konvexní optimalizace

Cvičení 7

Problém 1. Uvažme problém

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{za podmínek } & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_3 + 2x_4 \geq 4 \end{aligned}$$

Najděte jeho optimální hodnotu tak, že spočtete duál k (P) a ten vyřešíte graficky.

Problém 2. Buď (P) problém bez (explicitních) omezujících podmínek „minimalizujte $f(A\mathbf{x} + \mathbf{b})$.“ Funkce f je konvexní a definovaná na konvexní (ale velmi složité) množině $\mathcal{D}$, A je matice a $\mathbf{b}$ je vektor. Jak vypadá duál k (P)? Jak vypadá duál k (P’) zformulovanému jako

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & f(\mathbf{y}) \\ \text{za podmínek } & \mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

Který duál Vám přijde užitečnější?

Problém 3. Buď G graf se dvěma význačnými vrcholy z a s. Pro každou hranu $e = \{u, v\}$ známe její kapacitu $q(e) \in \mathbb{R}_+$. Chceme zjistit, kolik látky (třeba vody) jsme schopni poslat ze zdroje z do stoku s po hranách G, aniž bychom překročili kapacitu hran nebo látku někde hromadili (tj. stejně jako v úloze na elektrárny). Poněkud neprakticky si tento problém zapíšeme jako lineární program (P) s exponenciálně mnoha proměnnými. Buď $\mathcal{P}$ množina všech cest ze z do s. Pak náš problém je

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & -\sum_{p \in \mathcal{P}} x_p \\ \text{za podmínek } & \sum_{e \in p} x_p \leq q(e) \quad \text{pro každou hranu } e \in E(G) \\ & x_p \geq 0 \quad \text{pro každé } p \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Zformulujte duál k (P) a dokažte, že je ekvivalentní úloze spojité verzi problému najít v G *minimální řez*: Množinu hran C s minimálním součtem kapacit takovou, že po odebrání C z $E(G)$ nebudou z a s ležet ve stejných komponentách G.

Problém 4. Dokažte, že pokud je K vlastní konvexní kužel, tak $K^\star$ je konvexní uzavřená množna, ktera neobsahuje žadnou přímku procházející počátkem.