Cvičení 4

Problém 1. Buď $P(x,t) = x/t$ s definičním oborem $\{(x,t) \colon x \in \mathbb{R}, t \in (0,\infty)\}$.

a) Ověřte, že P není konvexní.

b) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte konvexní funkci Ψ_α takovou, že α-podúrovňová množina funkce P je rovna $\{(x,t) \colon \Psi_\alpha(x,t) \leq 0\}$.

Problém 2. Mějme lineární lomený program P (který obecně *není* konvexní):

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{x} + d}{\mathbf{e}^T\mathbf{x} + f} \\ \text{za podmínek } & G\mathbf{x} \preceq \mathbf{h} \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

(s implicitní podmínkou $\mathbf{e}^T\mathbf{x}+f > 0$). Náš cíl je P přepsat jako lineární program.

Uvažte program Q:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{a}^T\mathbf{y} + dz \\ \text{za podmínek } & G\mathbf{y} \preceq \mathbf{h}z \\ & A\mathbf{y} = \mathbf{b}z \\ & \mathbf{e}^T\mathbf{y} + fz = 1 \\ & z > 0. \end{aligned}$$

a) Dokažte, že P a Q jsou ekvivalentní (rada: vymyslete, jak na sebe hezky zobrazovat přípustná řešení).

b) Program Q není LP, kvůli ostré podmínce $z > 0$. Nechť Q' je Q kde místo $z > 0$ píšeme „$z \geq 0$“ – to už LP je. Předpokládejme, že Q' má optimální řešení se $z^\star = 0$ a že P má aspoň jedno přípustné řešení. Dokažte, že pak pro každé $\epsilon > 0$ existuje řešení P, jehož hodnota účelové funkce je ϵ-blízko optimální hodnotě Q'.

Problém 3. Mějme k druhů akcií, které můžeme koupit. Cena i-tého druhu akcií je dnes c_i. Cena i-tého druhu akcií za rok je náhodná veličina, u níž známe (nebo si myslíme, že známe) střední hodnotu h_i a rozptyl σ_i^2.

Jsme (naivně) řesvědčení, že ceny akcií jsou nezávislé náhodné veličiny. Chceme investovat fixní rozpočet tak, aby očekávaná hodnota našich akcií za rok byla aspoň b a rozptyl této hodnoty byl co nejmenší.

Zformulujte úlohu tuto úlohu jako optimalizační problém (nebude lineární).