# Cvičení 2

**Problém 1.** Rozhodněte, zda je konvexní množina:

1. Mříž $\mathbb{Z}^n$ v $\mathbb{R}^n$,
2. množina
$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_2 - x_3 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}.$$

**Problém 2.** Dokažte, že kužel $S_+^n$ je uzavřená množina a že neobsahuje žádnou přímku.

**Problém 3.** Dokažte, že každá norma je konvexní funkce.

**Problém 4.** Podrobně dokažte, že pro uspořádání vůči kuželu platí "sčítání nerovností": Buď $K$ vlastní kužel v $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\mathbf{x} \succeq_K \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} \succeq_K \mathbf{v}.$$

Potom platí
$$\mathbf{x} + \mathbf{u} \succeq_K \mathbf{y} + \mathbf{v}.$$

**Problém 5.** Nechť $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$ jsou konvexní funkce a $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_+$. Dokažte, že funkce $g(\mathbf{x}) = w_1 f_1(\mathbf{x}) + w_2 f_2(\mathbf{x}) + \cdots + w_n f_n(\mathbf{x})$ s definičním oborem $\cap_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i$ je konvexní.

**Problém 6.** Vyrábíme zmrzlinu jeden rok od ledna do prosince. Máme dobrý odhad poptávky po zmrzlině během roku: Pro $i$-tý měsíc roku značme $z_i$ počet tun zmrzliny, které jsme daný měsíc schopní prodat.

Potíž je v tom, že poptávka se mění během roku. Můžeme zvyšovat a snižovat výrobu a zmrzlinu skladovat, ale obojí nás stojí peníze: Změna výroby o jednu tunu nahoru či dolu z měsíce na měsíc stojí $c$ Kč a skladování tuny zmrzliny stojí $s$ Kč za měsíc (pro jednoduchost počítejme za „skladovanou" každou tunu, která nám na konci měsíc zbyde).

Zformulujte (nejlépe lineární) optimalizační problém, který popisuje, jak s minimálními náklady pokrýt poptávku během roku (začínáme v lednu s prázdným skladem a končíme v prosinci také s prázdným skladem; pro jednoduchost předpokládeme, že výrobu v lednu si můžeme bezplatně nastavit, jak chceme).