Konvexní optimalizace

Cvičení 12

Problém 1 (testování hypotéz se spojitým y)**.** Mějme neznámé $x \in \{0, 1\}$. Buď Y normálně rozdělená náhodná veličina s rozptylem 1 a střední hodnotou x.

Najděte nějaký netriviální paretovsky optimální detektor určující x pomocí měření Y. Jaký druh detektoru nám poskytne metoda maximální věrohodnosti pro naši situaci?

Pozn: Hustota normálního rozdělení s rozptylem 1 a střední hodnotou x je

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-x)^2/2}.$$

Problém 2. Buď $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektivní afinní zobrazení, $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ elipsoid. Dokažte, že pak je $h(\mathcal{E})$ také elipsoid.

Problém 3. Buď $C \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná množina, $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektivní afinní zobrazení. Dokažte, že $\mathcal{E}$ je Löwnerův-Johnův elipsoid pro C, právě když $h(\mathcal{E})$ je Löwnerův-Johnův elipsoid pro $h(C)$.

Problém 4. Je gradientový sestup afinně invariantní? Tj. platí, že pokud pro nějakou $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a počáteční bod $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ najde gradientový sestup posloupnost bodů $\mathbf{x}^{(k)}$ a $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je bijektivní afinní zobrazení, tak gradientový sestup najde pro $f \circ h^{-1}$ počáteční bod $h(\mathbf{x}^{(0)})$ posloupnost $h(\mathbf{x}^{(k)})$?

Problém 5. Spočtěte parciální derivace funkce $\ln \det X$ v bodě $X \in S^n_{++}$