Cvičení 11

V úlohách na konstrukci detektorů počítejte s neznámou hodnotou $x \in \{0, 1\}$ a naměřenou hodnotou $y \in \{1, 2, 3, 4\}$, jejíž pravděpodobnosti v závislosti na x jsou (stejně jako v Example 7.4 v učebnici)

	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
P_0	0,7	0,2	0,05	0,05
P_1	0,1	0,1	0,7	0,1

Problém 1. Mějme veličinu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, jejíž apriorní pravděpodobnostní rozdělení má hustotu $p(x) = Ce^{-(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)}$ ($C > 0$ je nedůležitá konstanta). Změřili jsme (bez chyby měření) x_1+2x_2 a dozvěděli se, že je to 10. Zformulujte úlohu odhadu $\mathbf{x}$ metodou maximalní aposteriorní pravděpodobnosti.

Problém 2. Test poměrem věrohodností funguje tak, že si zvolíme prahovou hodnotu t a odpovíme $\hat{x} = 1$ pokud $P_1(y)/P_0(y) \geq t$ (jinak $\hat{x} = 0$). Výsledkem je deterministický detektor.

Navrhněte všechny možné detektory používajících test poměrem věrohodnosti pro naši situaci. Jaké jsou jejich pravděpodobnosti chyb P_{fp}, P_{fn}?

Problém 3. Navrhněte pro naši situaci detektor, který minimalizuje $\max(P_{fp}, P_{fn})$.

Problém 4. Dokažte, že detektory z úlohy 2 jsou všechny paretovsky optimální (tohle platí obecně a říká se tomu Neymanovo-Pearsonovo lemma).

Problém 5. Vašim cílem v této úloze bude ukázat, že pro pozitivně definitní matice X, Y platí $X \succeq Y$, právě když $X^{-1} \preceq Y^{-1}$.

1. Dokažte, že $X \succeq Y$, právě tehdy když $I \succeq X^{-1/2}YX^{-1/2}$ (I je jednotková matice).
2. Dokažte, že pro $Z \succ 0$ platí $I \succeq Z$, právě tehdy když $I \preceq Z^{-1}$.
3. Dokažte použitím předchozích dvou bodů, že $X \succeq Y$, právě tehdy když $I \preceq X^{1/2}Y^{-1}X^{1/2}$.
4. Dokažte z předchozího bodu, že $X \succeq Y$, právě když $X^{-1} \preceq Y^{-1}$.

Připomínám, že pokud X je symetrická, tak $X^{1/2}$ je symetrická matice, která splňuje $X = X^{1/2}X^{1/2}$ a $X^{-1/2}$ je inverzní matice k $X^{1/2}$.