Konvexní optimalizace

Cvičení 10

Problém 1. V úloze 3 z písemky (s mincí) spočtěte odhad x v závislosti na y.

Problém 2. Opět máme minci, na které s neznámou pravděpodobností x padá panna. Chceme odhadovat metodou maximální věrohodnosti x jenom z výsledku jednoho hodu touto mincí. Co se stane?

Problém 3. Pod stromečkem jsme našli krabici, která může obsahovat buď ponožky (neznámá náhodná veličina $x = 0$), nebo laptop ($x = 1$). Obsah krabice zkoušíme odhadnout z její váhy – krabici jsme zvážili a váží 2 kg.

Z předchozích zkušeností víme, že pokud je krabice plná ponožek, tak váží $y = 1$ kg s pravděpodobností 30 %, 2 kg s pravděpodobností 30 % a 3 kg s pravděpodobností 40 %. Pokud je v krabici laptop, tak krabice váží 1 kg s pravděpodobností 5 %, 2 kg s pravděpodobností 35 % a 3 kg s pravděpodobností 60 %.

Odhadněte metodou maximální věrohodnosti obsah krabice.

Problém 4. V úlohách robustní aproximace se snažíme najít x takové, aby $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ i v situaci, kdy matici A taháme z nějakého pravděpodobnostního rozdělení. My se podíváme na jeden speciální případ takové aproximace.

Buď A matice $m \times n$ taková, že a_{ij} jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s rozptylem 1. Střední hodnota a_{ij} je rovna číslu c_{ij} (matici C známe).

1. Dokažte, že pak pro každé $\mathbf{x}$ je střední hodnota $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ rovna
$$\|(\mathbb{E}\, A)\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + n\|x\|_2^2.$$
2. Při stochastické robustní aproximaci (vůči 2-normě) hledáme $\mathbf{x}$ takový, že střední hodnota $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ je minimální. Jak tento problém zformulovat jako kvadratický program?