Jméno:

Konvexní optimalizace

Řešení první úlohy v 5. sadě domácích úkolů

Problém 1. Buď $K = \mathbb{R}^2_+$. Uvažte problém vícekriteriální optimalizace

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizujte (vůči } K) & (-3x_1 + 4x_2, 4x_1 - 3x_2) \\ \text{za podmínek} & x_1^2 + x_2^2 \le 25 \end{array}$$

Načrtněte si množinu přípustných řešení tohoto programu, vyznačte v náčrtu křivku všech paretovsky optimálních řešení a spočtěte souřadnice koncových bodů této křivky. Jsou krajní body křivky paretovsky optimalní?

Řešení: Spočteme optimální řešení pro všechny skalarizace původního problému s nenulovým vektorem vah $(\lambda_1, \lambda_2)^T$, kde $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$.

Skalarizovaná účelová funkce je pak

$$\lambda_1(-3x_1 + 4x_2) + \lambda_2(4x_1 - 3x_2) = (-3\lambda_1 + 4\lambda_2)x_1 + (4\lambda_1 - 3\lambda_2)x_2$$

Protože $\lambda_1(-3, 4) + \lambda_2(4, -3) \neq \mathbf{0}^T$, tak uvnitř kruhu $x_1^2 + x_2^2 \le 25$ nemá účelová funkce nikde nulový gradient, takže tam se optimum nenabývá. Podívejme se tedy na hranici kruhu, kterou si parametrizujeme jako

$$(x_1, x_2) = (5\cos\alpha, 5\sin\alpha).$$

Chceme tedy minimalizovat funkci

$$5(-3\lambda_1 + 4\lambda_2)\cos\alpha + 5(4\lambda_1 - 3\lambda_2)\sin\alpha$$

Pozorování: Funkce $a\cos\alpha + b\sin\alpha$ nabývá (pro $(a, b) \neq \mathbf{0}$) svého minima, právě když má vektor $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ opačný směr než vektor (a, b).

Důkaz: Volme θ úhel svíraný vektory (a, b) a $(1, 0)$ a značme $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pak $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ a máme

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = r\cos(\alpha - \theta).$$

Nyní funkce kosinus nabývá minimum v bodech $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tedy $\alpha = \pi + \theta$. Zbývá si uvědomit, že α určuje směr vektoru $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Důsledek: Minimum našeho skalarizovaného problému nastává v bodě kružnice, jehož průvodič má směr opačný k vektoru

$$\mathbf{w} = \lambda_1(-3, 4) + \lambda_2(4, -3)$$

Pro $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ leží vektor $\mathbf{w}$ v kuželu s hraničními polopřímkami $\{\lambda_1(-3, 4) \colon \lambda_1 \ge 0\}$ a $\{\lambda_2(4, -3) \colon \lambda_2 \ge 0\}$. Z toho pak plyne, že množina $-5\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ jde (při proměnlivých λ_1, λ_2) po kružnici proti směru hodinových ručiček od bodu $(-4, 3)$ (pro $\lambda_1 = 0$) do bodu $(3, -4)$ (pro $\lambda_2 = 0$).

Zbývá si uvědomit, že krajní body tohoto oblouku jsou v tomto případě paretovsky optimální. Ze symetrie to stačí dokázat pro bod $(-4, 3)$, který má hodnotu původní účelové funkce $(24, -25)$. Bod $(-4, 3)$ je (z argumentace o hledání minima funkce $a \cos \alpha + b \sin \alpha$ výše) jediný bod kruhu $x_1^2 + x_2^2 \leq 25$, kde má druhá souřadince účelové funkce hodnotu ≤ -25. Proto pokud $f_0(\mathbf{x}) \preceq f_0(-4, 3)$, tak nutně $\mathbf{x} = (-4, 3)$ a jsme hotovi.

Náčrt situace (šedá zóna je množina, kde mohou být vektory $\mathbf{w}$ a tučný oblouk jsou paretovsky optimální řešení).