Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 8 domácích úkolů

Termín odevzdání: 28. listopadu 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
Σ	10	

Problém 1. Uvažte lineární program

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & -x_1 \\ \text{za podmínek} & x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Optimální hodnota tohoto programu je $\mathbf{x}^\star = (28, 8)$. Řekněme, že účelovou funkci změníme na $-x_1 - tx_2$, kde t je nějaká konstanta. Pro které hodnoty t zůstane $(28, 8)$ optimálním řešením?

Problém 2 (Inspirováno hrou Aréna. Altar, 1997)**.** Simulujeme šerm takto: Máme dva hráče, kteří si oba vyberou jedno z čísel 1, 2, nebo 3, které symbolizují druh útoku/obrany. Pokud je číslo hráče 1 (útočníka) rovno číslu hráče 2 (obránce), tak obránce útok odrazil a oba hráči získají 0 bodů. Pokud jsou čísla různá, tak hráč 1 získá a hráč 2 ztratí tolik bodů, kolik činila hodnota vybraná hráčem 1.

Určete pomocí počítače strategii optimální v nejhorším případě pro hráče 1 a totéž pro hráče 2. Určete také hodnotu této hry (tj. očekávaný zisk bodů hráče 1, pokud oba hráči hrají podle strategie optimální v nejhorším případě). Svůj program mi nemusíte posílat, ale okomentujte, jak jste jej vytvořili.

Problém 3. Prodáváme barvy. Máme 100 hektolitrů azurové, 50 hektolitrů purpurové a 110 hektolitrů žluté barvy. Bohužel zákazníci chtějí červenou (za cenu 10 Kč/l), zelenou (15 Kč/l), modrou (25 Kč/l) a černou (25 Kč/l).

Můžeme míchat barvy takto:

- 1 jednotka žluté a 1 jednotka purpurové nám dá 2 jednotky červené,
- 1 jednotka žluté a 1 jednotka azurové nám dá 2 jednotky zelené,
- 1 jednotka purpurové a 1 jednotka azurové nám dá 2 jednotky modré,
- po jedné jednotce azurové, purpurové a žluté nám dá 3 jednotky černé.

Krom prodávání barev můžeme v malých množstvích (řekněme nejvýše 1 hektolitr) i nakupovat azurovou, purpurovou a žlutou. Kolik nejvíce bychom měli (aby se nám to vyplatilo) zaplatit za litr azurové? A co za litr puropurové? A co za litr žluté?

Při výpočtu si můžete pomoci počítačovým řešičem konvexních problémů. Program mi nemusíte posílat, ale vysvětlete, co a proč počítate.

Problém 4. Máme dány dva polyedry

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \preceq \mathbf{b}\}, \quad Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : C\mathbf{x} \preceq \mathbf{d}\}.$$

Polyedry P, Q jsou neprázdné, disjunktní a dokonce pro ně existuje i ostře oddělující nadrovina, tj. existuje $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\gamma \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in P$ máme $\mathbf{a}^T\mathbf{x} < \gamma$ a pro každé $x \in Q$ máme $\mathbf{a}^T\mathbf{x} > \gamma$.

1. Dokažte, že $\mathbf{a}, \gamma$ jsou takové, že pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{a}^T\mathbf{x} < \gamma$, právě když existuje $\lambda \succeq 0$ vektor takový, že $\mathbf{a} = A^T\lambda$ a $\gamma > \lambda^T\mathbf{b}$. Bude se Vám tu hodit dualita pro lineární programy (nebo Farkašovo lemma; pokud nevíte, co dělat, zkuste se inspirovat v sekci 5.8.2).

2. Dokažte podobně, že $\mathbf{a}, \gamma$ jsou takové, že pro každé $\mathbf{x} \in Q$ platí $\mathbf{a}^T\mathbf{x} > \gamma$, právě když existuje $\mu \succeq 0$ vektor takový, že $\mathbf{a} = -C^T\mu$ a $\gamma < -\mu^T\mathbf{d}$.

3. Použitím předchozích dvou bodů dokažte, že pokud $\mathbf{a}, \gamma$ určují nadrovinu ostře oddělující P a Q, tak existují $\lambda \succeq 0$ a $\mu \succeq 0$ vektory takové, že $\mathbf{a} = A^T\mu = -C^T\lambda$ a γ leží uvnitř intervalu $(\lambda^T\mathbf{b}, -\mu^T\mathbf{d})$.

4. Použijte znalosti z předchozího bodu k formulaci lineárního programu (používajícího A, $\mathbf{b}$, C, $\mathbf{d}$), z jehož optimálního řešení už lze snadno zjistit γ a $\mathbf{a}$, které určují ostře oddělující nadrovinu pro P a Q.

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.