

Sada 7 domácích úkolů

Termín odevzdání: 21. listopadu 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

| Problém | Bodů max | Bodů |
|----------|----------|------|
| 1 | 2 | |
| 2 | 2 | |
| 3 | 3 | |
| 4 | 3 | |
| Σ | 10 | |

Problém 1. Uvažme optimalizační problém (P)

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } e^{-x} \\ &\text{za podmíněk } x^2/y \leq 0, \end{aligned}$$

kde definiční obor x^2/y položíme rovný $\mathcal{D} = \{(x, y) : y > 0\}$.

1. Najděte optimální řešení (P) bez použití počítače.
2. Zformulujte duál (D) k (P).
3. Najděte optimální řešení (D) a přesvědčte se, že $d^* < p^*$.
4. Proč pro (P) nelze použít silnou větu o dualitě?
5. Začne silná dualita platit, pokud podmínku $x^2/y \leq 0$ nahradíme slabší verzí $x^2/y \leq 1/100$?

Problém 2. Mějme problém nejmenších čtverců s lineárními omezeními ve tvaru

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ &\text{za podmíněk } G\mathbf{x} = \mathbf{h}, \end{aligned}$$

kde A je matice $m \times n$ hodnosti n a G je matice $p \times n$ hodnosti p . Použijte KKT podmínky k nalezení rovnic, jejichž řešení dává primární optimální řešení \mathbf{x}^* a duální optimální řešení ν^* .

Problém 3. Mějme problém

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} && -\sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_2-2} \\ &\text{za podmíněk} && 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ &&& x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

Zavedeme si Lagrangián

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -\sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_2-2} + \lambda_1(3x_1 + 2x_2 - 10) + \lambda_2(x_2 - 5)$$

1. Ověřte, že zadaný problém splňuje Slaterovu podmínku.
2. Optimální duální řešení je $\lambda^* = (\sqrt{30}/36, 0)$. Spočtete pomocí KKT kritéria (bez použití počítače) optimální řešení primárního problému.

Problém 4 (two-way partitioning). Uvažme problém rozdělení skupiny n lidí do dvou skupin, tak aby všichni byli co nejméně naštvaní. Pro i -tého a j -tého člověka si označím $W_{i,j}$, jak moc nechtějí být i a j spolu. Budeme předpokládat, že matice W je symetrická. Rozdělení lidí do skupin si zakóduji jako vektor \mathbf{x} jehož komponenty budou $+1$ a -1 . Celková míra naštvanosti pak bude

$$\sum_{i,j=1}^n W_{ij}x_i x_j = \mathbf{x}W\mathbf{x}$$

(tj příspěvek W_{ij} je záporný, pokud $x_i \neq x_j$ a kladný pokud $x_i = x_j$). Toto bohužel není konvexní problém, protože nemůžeme někoho umístit do skupiny jenom zčásti, ale to nám nevádí.

1. Zformulujte duální problém k problému

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \\ &\text{za podmíněk } x_i^2 = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

jako problém semidefinitního programování.

2. Co nám říká slabá věta o dualitě o řešení původního problému a číslu d^* ?
3. Vyřešte duální problém k problému rozdělení do dvou skupin pomocí CVXOPT/CVXPY pro $n = 6$ a matici

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svůj kód mi pošlete na adresu kazda@karlin.mff.cuni.cz Na stejný mail mi pošlete i hodnoty optimálního řešení (nemusíte je sem psát).

Při řešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.