Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 6 domácích úkolů

Termín odevzdání: 14. listopadu 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	
Σ	10	

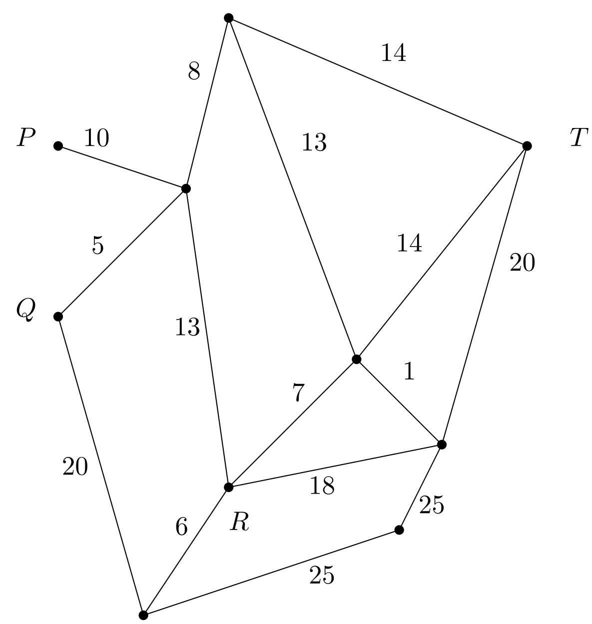
Problém 1. Zformulujte duální problém k problému

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \mathbf{x}^T\mathbf{x} \\ \text{za podmínek} & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{array}$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jsou proměnné, A je matice $m \times n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ je vektor.

Problém 2. Uvažme elektrickou síť jako na obrázku. Úsečky jsou vedení a uzly jsou stanice, které umí dělit/slučovat a posílat příchozí výkon do jiných vedení (neumí ale elektřinu vyrábět ani skladovat; výjmkou jsou elektrárny P, Q, R a továrna T – viz dále). Každý úsek vedení může vést maximálně tolik MW energie, kolik je u něj poznačeno na obrázku.

Našim cílem je poslat z elektráren P, Q, R co nejvíce energie do továrny T. Můžeme předpokládat, že elektrárny mohou produkovat neomezeně mnoho energie.



a) Zformulujte problém jako lineární program (P). Vysvětlete svůj postup. Podmínky programu stačí napsat ve tvaru „i-tá podmínka má tvar té a té nerovnosti/rovnosti s kapacitou těch a těch vedení“, tj. nemusíte rozepisovat konkrétní hodnoty.

b) Zformulujte duální problém k (P) (opět nemusíte psát konkrétní čísla). Vysvětlete svůj postup.

c) Vyřešte duální problém na počítači (teď už pro zadané kapacity). Svůj kód mi nemusíte posílat, stačí mi tu uvést hodnoty *duálních* proměnných, které tvoří optimální řešení.

Místo na řešení úlohy 2

Problém 3 (Dualita pro kuželové programování)**.** Mějme kuželový optimalizační problém (P)

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ \text{za podmínek } & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \succeq_K \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde K je (vlastní konvexní) kužel. Zformulujte co nejlepší dolní odhad na optimální hodnotu (P) ve formě optimalizační úlohy „maximalizujte ... za podmínek ... “ podobně, jako jsme si na přednášce ukázali dualitu pro lineární programování.

Rada: Budete potřebovat duální kužel ke K.

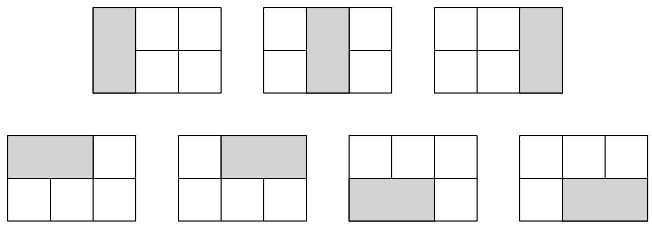
Ještě větší rada: Pokud $\mathbf{c} \succeq_{K^\star} \mathbf{d}$, tak pro všechna $\mathbf{x} \succeq_K \mathbf{0}$ platí $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{d}^T\mathbf{x}$.

Problém 4. Dokažte pomocí Farkašova lemmatu (bez použití počítače), že soustava lineárních rovnic a nerovnic

$$\begin{aligned} 2x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_6 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

nemá řešení.

Problém 5. Zjednodušená hra „Lodě“ se sestává z jednoho kola, kdy první hráč umístí loď 1×2 (horizontálně nebo vertikálně) na hrací plochu 2×3 do jednoho ze sedmi možných postavení:



Druhý hráč si mezi tím, aniž by věděl, kam byla loď umístěna, vybere jedno ze 6 políček hrací plochy jako cíl. Oba hrači si pak současně sdělí své tahy.

Pokud loď prvního hráče obsahuje políčko vybrané druhým hráčem jako cíl, tak první hráč ztratí bod a druhý hráč dostane bod. Pokud loď prvního hráče neobsahuje cíl druhého hráče, tak první hráč získává bod a druhý hráč ztrácí bod.

Aby byli méně předvídatelní, mohou oba hráči volit své tahy náhodně (a pochopitelně nezávisle). Strategie prvního hráče se bude sestávat z pravděpodobností $p_1, \ldots, p_7$ voleb pozice 1 až 7 pro loď. Strategie druhého hráče se bude sestávat z pravděpodobností $q_1, \ldots, q_6$ výběru i-tého pole jako cíle.

Řekneme, že strategie prvního hráče je optimální v nejhorším případě, pokud maximalizuje střední hodnotu zisk bodů prvního hráče i v případě, že druhý hráč zná čísla $p_1, \ldots, p_7$ a volí svá čísla $q_1, \ldots, q_6$ podle nich (tj. pokud si třeba jako první hráč volím každou pozici lodi s pravděpodobností $1/7$, tak druhý hráč se to v nejhorším případě dozví a bude vítězit s pravděpodobností $3/7$ soustavným ostřelováním políčka v prostředním sloupci a horní řadě).

Zformulujte (se zdůvodněním, co a proč volíte) konvexní program, který vám pomůže spočíst strategii prvního hráče, která je optimální v nejhorším případě. Program pak vyřešte pomocí knihovny CVXOPT/CVXPY, napište mi sem výslednou optimální stragii a program mi pošlete na kazda@karlin.mff.cuni.cz.

Místo na řešení úlohy 5

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.