Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 5 domácích úkolů

Termín odevzdání: 7. listopadu 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	
Σ	10	

Problém 1. Buď $K = \mathbb{R}^2_+$. Uvažte problém vícekriteriální optimalizace

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizujte (vůči } K) & (-3x_1 + 4x_2, 4x_1 - 3x_2) \\ \text{za podmínek} & x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \end{array}$$

Načrtněte si množinu přípustných řešení tohoto programu, vyznačte v náčrtu křivkuvšech paretovsky optimálních řešení a spočtěte souřadnice koncových bodů této křivky. Jsou krajní body křivky paretovsky optimalní?

Problém 2. Najděte chybu v následujícím „důkazu“.

Tvrzení (nepravdivé)**.** *Pokud P je vektorový program, kde minimalizujeme účelovou funkci $f_0(\mathbf{x})$ vůči kuželu K a $\mathbf{x}_p$ je paretovsky optimální řešení P, tak pro každý $\lambda \succ_K 0$ je $\mathbf{x}_p$ optimální řešení skalarizace P s váhami λ.*

Špatný důkaz. Vezměme libovolné λ z vnitřku K. Uvažme polopřímku

$$q = \{f(\mathbf{x}_p) - t\lambda \colon t \geq 0\}.$$

Protože $\mathbf{x}_p$ je paretovsky optimální, množina

$$\mathcal{O} = \{f_0(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \text{ je přípustné řešení } P\}$$

protíná q právě v $f_0(\mathbf{x}_p)$. Proto $\lambda^T f_0(\mathbf{x}_p) \leq \lambda^T f_0(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}$ přípustná řešení P. Z toho plyne, že $\mathbf{x}_p$ optimální řešení skalarizace P s váhami λ. $\square$

Problém 3. Dokažte, že pokud $K \subset \mathbb{R}^m$ je vlastní konvexní kužel a funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je K-konvexní a $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ je vektor, tak **u**-podhladinová množina

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon f(\mathbf{x}) \preceq_K \mathbf{u}\}$$

je konvexní.

Problém 4. Pro A matici $n \times n$ definujeme její 2-normu jako

$$\|A\|_2 = \sup\{\|A\mathbf{v}\|_2 \colon \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\|_2 = 1\}.$$

Dokažte, že

$$\|A\|_2 = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \colon A^T A \preceq s^2 I\},$$

kde I je jednotková matice stejných rozměrů jako A.

Problém 5. Naším cílem je použít semidefinitní programování (a CVXOPT/CVXPY) k vyřešení následující úlohy: Najděte symetrickou matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1+a & -2+a-b \\ -2+a-b & -1+b \end{pmatrix},$$

s minimální 2-normou. Použijte tvrzení z předchozí úlohy k formulaci (se stručným komentářem) semidefinitního programu, jehož optimalní řešení vám dá takovou matici. Program pak vyřešte na počítači a napište mi sem hodnoty optimálních a, b. Svůj program mi pošlete na adresu kazda@karlin.mff.cuni.cz.

Můžete bez důkazu použít, že pro $t \geq 0$, jednotkovou 2×2 matici I a libovolnou 2×2 matici A platí

$$\begin{pmatrix} tI & A \\ A^T & tI \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^T A \preceq t^2 I.$$

PS: V CVXOPT budete potřebovat funkci `cvxopt.solvers.sdp`

Sem můžete psát taky!

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.