Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 4 domácích úkolů

Termín odevzdání: 31. října 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	1	
2	2	
3	2	
4	2	
5	3	
Σ	10	

Problém 1. Najděte kuželový program druhého řádu, který je ekvivalentní následujícímu QCQP v proměnných x_1, x_2:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 7 \\ \text{za podmínek } & 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 - 20x_1 \leq 36 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Pozn: Může se vám hodit, že každou pozitivně semidefinitní matici P lze zapsat ve tvaru $P = A^T A$, kde A je nějaká čtvercová matice (znáte z lineární algebry).

Problém 2. Měme dány dvě (konečné) množiny $X_+ = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}, X_- = \{\mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_{r+s}\}$ bodů v $\mathbb{R}^n$ a chtěli bychom je oddělit nadrovinou, tj. najít $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$X_+ \subseteq \{\mathbf{x} \colon \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b\},$$
$$X_- \subseteq \{\mathbf{x} \colon \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b\}.$$

Pro co nejbezpečnější oddělení obou množin bychom navíc chtěli, aby vzdálenost roviny $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ od obou množin X_+, X_- byla maximální. Zformulujte tento problém jako kvadratický program s kvadratickými omezeními (QCQP) a vysvětlete, proč Váš program funguje.

Při řešení můžete předpokládat, že obě množiny X_+, X_- jsou neprázdné a že existuje oddělující nadrovina, na které jsou nerovnosti mezi $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ a b ostré.

Rada: Pokud Vám to ne a ne fungovat, inspirujte se v osmé kapitole v učebnici.

Problém 3. Blíží se Halloween a jdeme lovit strašidla. Máme batoh, kam se vejde 17 kg vybavení, a chceme si s sebou vzít věci, co dávají co největší součet užitečnosti.

Od každé věci si můžeme vzít buď nula nebo jeden kus, což bohužel není konvexní podmínka. Vyřešte proto problém batohu jako lineární program za předpokladu, že je možné vzít si s sebou danou věc částečně (tj. třeba 60 % jízdního kola má 60 % váhy i užitečnosti) a porovnejte optimum lineárního programu s nejlepším řešením původního problému (kde nelze brát zlomky věcí), které Vás napadne.

Pro řešení lineárního programu použijte počítač, ale Váš program mi nemusíte posílat (řešení LP by mělo už být rutinní záležitost) – stačí zformulovat úlohu (se zdůvodněním) a zapsat optimální řešení sem na papír.

Tabulka užitečnosti a váhy různých věcí:

Věc	Váha (kg)	Užitečnost
Mobil	0,3	10
Zrcadlo	0,5	3
Údajně stříbrný prsten	0,1	1
Láhev kolejní vody	1	2
Česnek	0,5	5
Svíčky	0,5	8
Deka	2	8
Křídy (balení XXL)	1	5
Diferenciální počet II	1	3
Kuše	2	7
Katana	4	15
Past na medvěda	5	30
Jízdní kolo	15	25

Problém 4. Převeďte úlohu semidefinitního programování z tvaru s nerovnostmi

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} \ -x_1 - x_2 - x_3 \\ &\text{za podmínky} \ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} 30 & -2 \\ -2 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

na standardní tvar (viz sekce 4.6.2.).

Problém 5 (Dvoukriteriální optimalizace)**.** Naše portfolio se může skládat ze čtyř druhů akcií, říkejme jim 1, 2, 3 a 4. Zisk z investice do těchto akcií je náhodná veličina. Pokud x_i bude zlomek našich prostředků investovaný do i-tého druhu akcií, tak očekáváme zisk $0{,}1x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}01x_4$. Navíc známe kovarianční matici

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-2} & 0 & -10^{-4} & 10^{-4} \\ 0 & 10^{-2} & -10^{-5} & 0 \\ -10^{-4} & -10^{-5} & 10^{-3} & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix},$$

která nám umožní spočíst rozptyl našeho zisku jako $\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$.

Chceme maximalizovat zisk a minimalizovat rozptyl, což budeme dělat tak, že si zvolíme míru averze vůči riziku a budeme chtít investovat jednu jednotku prostředků tak, abychom maximalizovali $0{,}1x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}01x_4 - \gamma \mathbf{x} \Sigma \mathbf{x}$.

Pro fixní $\gamma \geq 0$ tuto úlohu zformulujte jako konvexní problém a rozhodněte s pomocí CVXOPT/CVXPY, jak rozdělit naše prostředky pro γ jdoucí od 0 do 2 v krocích délky 1/10.

Do papírového řešení zformulujte (s komentářem) konvexní program, který řešíte a stručně okomentujte výsledek z CVXOPT/CVXPY (ve stylu „Opatrnému investorovi bych doporučil(a) to a to, investorovi, kterému nevadí riziko, to a to…“). Mailem mi pak pošlete svůj program a výsledky svého výpočtu.

Sem můžete psát taky!

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.