Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 3 domácích úkolů

Termín odevzdání: 24. října 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	1	
2	2	
3	2	
4	2	
5	3	
Σ	10	

Problém 1. Buď $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ norma, A matice $n \times m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $d \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pak funce $f(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} + \mathbf{b}\| - \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d$ je konvexní.

Problém 2. Dokažte, že funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní, právě když její epigraf je konvexní podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$.

Problém 3. Buď ρ pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^n$, tj. míra taková, že $\rho(\mathbb{R}^n) = 1$. Pro bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definujeme *poloprostorovou hloubku* bodu $\mathbf{x}$, značenou $D(\mathbf{x})$, jako infimum

$$D(\mathbf{x}) = \inf\{\rho(H) \colon H \text{ je poloprostor s hranicí procházející } \mathbf{x}\}$$

(zde $\rho(H)$ je míra H včetně hranice). Dokažte, že D je kvazikonkávní funkce, tj. $-D$ je kvazikonvexní.

Pozn.: Pojem poloprostorové hloubky se používá ke zobecnění pojmu medián na více dimenzí. Zobecněný medián je $\mathbf{x}$, který maximalizuje D.

Problém 4. Vyrábíme zmrzlinu jeden rok od ledna do prosince. Máme dobrý odhad poptávky po zmrzlině během roku: Pro i-tý měsíc roku značme z_i počet tun zmrzliny, které jsme daný měsíc schopní prodat.

Potíž je v tom, že poptávka se mění během roku. Můžeme zvyšovat a snižovat výrobu a zmrzlinu skladovat, ale obojí nás stojí peníze: Změna výroby o jednu tunu nahoru či dolu z měsíce na měsíc stojí c Kč a skladování tuny zmrzliny jeden měsíc stojí s Kč. Jak pokrýt poptávku během roku (začínáme v lednu s prázdným skladem a končíme v prosinci také s prázdným skladem; pro jednoduchost předpokládeme, že výrobu v lednu si můžeme bezplatně nastavit, jak chceme) s minimálními náklady?

Zformulujte příklad jako problém *lineárního* programování navzdory tomu, že formulace obsahuje absolutní hodnoty. Budete si muset pomoci přidáním pomocných proměnných.

Problém 5. Buď X systém složený z mnoha jednoduchých součástí (molekul, lidí, ...). Tyto součásti se nachází ve stavech $a_1, \dots, a_n$ a různě (a složitě) mezi těmito stavy přecházejí. Označme p_i zlomek součástí systému, které jsou ve stavu a_i; čísla p_i se chovají jako pravděpodobnosti: Máme $p_1 + \dots + p_n = 1$ a $p_i \geq 0$ pro všechna i. *Entropie* systému S je daná funkcí

$$S(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i,$$

kde položíme $0 \cdot \ln 0 = 0$.

Ve fyzice i jinde nás často zajímá, kdy má systém maximální entropii za předpokladu, že o systému známe nějaké makroskopické informace (teplotu, energii, hybnost a podobně). Maximální entropie odpovídá stavu, který je pro dané hodnoty makroskopických stavů nejméně uspořádaný a „nejčastější“.

a) Dokažte, že S je konkávní funkce.

b) Řekněme, že lidé v populaci mohou být v 99 možných stavech $a_1, \dots, a_{99}$, které popisují měsíční příjem: Člověk ve stavu a_i vydělá za měsíc i tisíc Kč hrubého. Najděte rozdělení příjmů v populaci (tj. čísla $p_1 \dots p_{99}$), která maximalizují entropii rozdělení příjmů, víme-li, že průměrný výdělek za měsíc je 29 tisíc hrubého.

Druhou část úlohy řešte na počítači pomocí CVXOPT (nebo CVXPY) a jazyka Python. K optimalizaci s nelineární účelovou funkcí budete potřebovat funkci `cvxopt.solvers.cp`, která řeší kvadratické programy s účelovou funkcí zadanou v oracle modelu.

Program mi pošlete na adresu kazda@karlin.mff.cuni.cz. Výstup z programu mi zkopírujte do těla mailu, nemusíte ho opisovat na papír. Pokud mi chcete udělat radost, vyrobte histogram pravděpodobností p_i (nepovinně).

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte.*