

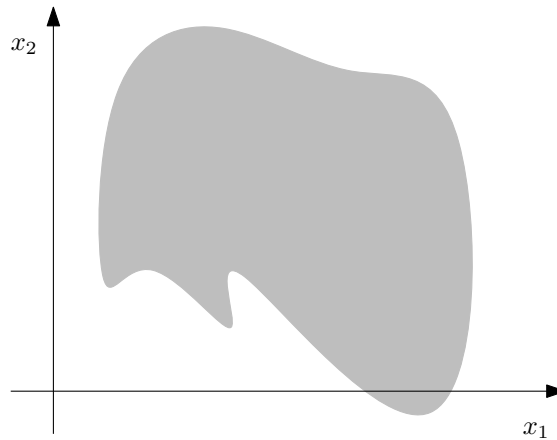
Sada 2 domácích úkolů

Termín odevzdání: 17. října 2017 ve 12:21

Problém	Bodů max	Bodů
1	1	
2	2	
3	2	
4	2	
5	3	
Σ	10	

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém 1. Bud' $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \succeq 0\}$ nezáporný kvadrant v \mathbb{R}^2 . Načrtněte v šedé množině na obrázku body, které jsou minimální v uspořádání \preceq_K . Stručně zdůvodněte svůj postup a upřesněte, jestli množina vašich vybraných bodů je uzavřená, otevřená, nebo ani jedno.



Problém 2. Rozhodněte zda následující funkce jsou konvexní a/nebo konkávní. Pokud nejsou konvexní, jsou aspoň kvazikonvexní? Zdůvodněte.

a) $u(x) = 2\sqrt{x} - 2$ pro $x \in [0, \infty)$

b) $g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$ (geometrický průměr) kde n je přirozené číslo a $\mathbf{x} \succ 0$.

c)

$$h(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 1}{x_2 + 3}$$

definičním oborem $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{-3\}$

Problém 3. Najděte dvě konvexní funkce $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že f a g jsou konečné a definované na celé množině \mathbb{R} a přitom funkce $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ není konvexní. Je tento příklad ve sporu s větou o infimu konvexní funkce (sekce 3.2.5 učebnice)? Zdůvodněte.

Problém 4. Podrobně dokažte, že takzvané měkké maximum, definované pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jako funkce

$$f(\mathbf{x}) = \ln(\exp(x_1) + \exp(x_2) + \cdots + \exp(x_n))$$

je konvexní funkce.

Pokud nechcete počítat derivace, vyplatí se vám použít věty o operacích, které zachovávají konvexitu.

Problém 5. 21 trpaslíků těží uhlí v dole. Protože se trpaslíci liší v pracovitosti a šikovnosti, chtěli bychom vědět, jak moc toho ten který trpaslík za den natěží. Bohužel máme k dispozici jenom údaje o tom, které dny byl který trpaslík v práci a kolik uhlí se daný den natěžilo celkem (soubor trpaslici.csv: Sloupce jsou dny, řádky docházka jednotlivých trpaslíků, kde 0 je absence; poslední řádek souboru je počet natěžených tun uhlí).

Zformulujte úlohu jako problém nejmenších čtverců a vyřešte ji pomocí CVXOPT (nebo CVXPY). K načtení dat o trpaslících se vám mohou hodit knihovny csv nebo pandas pro Python (ale nevádí mi, když údaje z csv souborů natvrdo zkopírujete do svého kódu).

Svůj program mi pošlete do termínu odevzdání na adresu kazda@karlin.mff.cuni.cz. Součástí řešení je jak program, tak zdůvodnění vašeho postupu a stručný komentář pokud jde o realističnost výsledku, který jste dostali.

Při řešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.