Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 12 domácích úkolů

Termín odevzdání: **9.** ledna 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
Σ	10	

Problém 1. Uvažme příklad ze (středeční předvánoční) přednášky na chování gradientní metody (s přesným hledáním na přímce) pro funkci $1/2(x_1^2 + \gamma x_2^2)$ s počátečním bodem $\mathbf{x}^{(0)} = (\gamma, 1)$. Dokažte, že $\mathbf{x}^{(k)} = \left(\gamma\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^k, \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^k\right)$.

Problém 2. Máme tři továrny A, B, C a tři prodejny P, Q, R v $\mathbb{R}^2$ a chceme postavit dvě distribuční střediska D, D' tak, aby součet euklidovských vzdáleností

$$3|DD'| + |AD| + |BD| + |CD| + |PD'| + |QD'| + |RD'|$$

byl minimální.

Pozice továren: $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (3, 0)$. Pozice prodejen $P = (-2, -2)$, $Q = (-1, -3)$, $R = (-3, -3)$.

Úlohu zformulujte na papíře a pak vyřešte pomocí CVXOPT/CVXPY. Svůj kód a souřadnice pro D, D' mi pak pošlete na kazda@karlin.mff.cuni.cz.

Problém 3. Buď $C \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina. Těžiště C je definované jako bod

$$\mathbf{x}_t = \frac{\int_C \mathbf{x}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n}{\int_C \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n},$$

kde $\int_C \quad \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$ je n-dimenzionální integrál přes celou množinu C s promennými $x_1, \dots, x_n$ a integrál z vektorové funkce $\mathbf{x}$ s počítá po složkách.

1. Dokažte, že funkce

   $$f(\mathbf{x}) = \int_C \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \dots \mathrm{d}u_n.$$

   je konvexní.

2. Dokažte, že těžiště (které není snadné přesně spočítat) minimalizuje $f(\mathbf{x})$ z předchozího bodu.

Problém 4. Implementujte gradientový sestup (s backtrackingem na přímce s nějakými rozumnými koeficienty α, β) pro minimalizaci funkce (nejmenší čtverce regularizované měkkým maximem):

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \ln\left(\sum_{i=1}^{8} \exp(x_i) + \sum_{i=1}^{8} \exp(-x_i)\right),$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^8$, matice A je 10×8 s hodnotami $a_{ij} = (i-5)^{j-1}$ (kde položíme $0^i = 0$ pro $i > 0$ a $0^0 = 1$) a

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Úlohu vyřešte v Pythonu. Můžete používat knihovny pro lineární algebru jako je numpy (nebo i maticové funkce z CVXOPT), ale nepoužívejte funkce na řešení konvexních problémů nebo numerické hledání minima – minimalizace účelové funkce je tentokrát na Vás. Svůj program a nalezené optimální $\mathbf{x}$ mi pošlete na kazda@karlin.mff.cuni.cz. Pokud bude Váš kód čitelný, tak nemusíte tady na papíře vysvětlovat, co děláte.