

## Sada 11 domácích úkolů

Termín odevzdání: 19. prosince 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
$\Sigma$	10	

**Problém 1.** Najděte soustavu 20 lineárních nerovnic takových, že popisují polyedr  $X$ , který nelze popsat jako konvexní obal méně než  $2^{10}$  bodů (tj. polyedr  $X$  má aspoň 1024 vrcholů).

**Problém 2.** Chceme navrhnout experiment sestávající z 1000 měření, který nám co nejpřesněji určí veličinu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ . Řekněme, že máme k dispozici dva druhy měření: První měření nám vrátí veličinu  $x_1 + x_2 + w$ , druhé měření vrátí  $2x_1 + x_2 + w$ , kde  $w$  je v obou případech náhodná chyba se střední hodnotou 0 a rozptylem 1 (hodnoty  $w$  z různých měření jsou jako obvykle stejně rozdělené nezávislé).

Kolik kterých měření máme provést, abychom minimalizovali objem konfidenčního elipsoidu? Úlohu vyřešte ručně, ne na počítači.

**Problém 3.** Při návrhu E-optimálního experimentu (minimalizace poloměru konfidenčního elipsoidu) řešíme problém

$$\text{minimalizujte } \left\| \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \right)^{-1} \right\|_2$$

$$\text{za podmíněk } \lambda \succeq 0, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1,$$

kde  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  jsou dané vektory a proměnné jsou  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Budeme předpokládat, že úloha má přípustné řešení.

1. Dokažte, že tento problém je ekvivalentní problému (P) s proměnnými  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  a  $q$ :

$$\text{minimalizujte } q$$

$$\text{za podmíněk } \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \succeq I$$

$$\lambda \succeq 0, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = q.$$

*Pokračování na další straně.*

2. Spočtete duální problém k problému (P).

**Problém 4.** Vrátime se k problému s gobliny a zkusíme se zbavit falešných zápisů metodou elipsoidního strouhání (ellipsoidal peeling): Vezměte opět data ze souboru goblini.csv. Nyní ale interpretujte záznam z každého dne jako vektor v  $\mathbb{R}^{14}$  (se složkami 13 čísel z prezenční listiny a údaj o celkové těžbě).

Nalezněte pomocí CVXOPT/CVXPY elipsoid o minimálním objemu, který obsahuje vektory za všech 100 dnů. Za odlehlé hodnoty prohlásíme vektory, které leží na hranici tohoto elipsoidu. Najděte a odstraňte ze sady dat vektory na hranici elipsoidu (protože se bavíme o numerických výpočtech, hranici budete muset nafouknout na tloušťku cca  $10^{-14}$ , aby to dávalo smysl) a spočtete produktivity jednotlivých goblinů z „ostrouhaných“ dat metodou nejmenších čtverců.

V papírovém řešení stručně vysvětlíte, co děláte. Svůj program pro výpočet minimálního opsaného elipsoidu, seznam odstraněných záznamů a výsledné produktivity goblinů mi pošlete na [kazda@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kazda@karlin.mff.cuni.cz)