Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 1 domácích úkolů

Termín odevzdání: 10. října 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	1	
2	1	
3	2	
4	3	
5	3	
Σ	10	

Problém 1. Načrtněte konvexní množinu danou soustavou rovnic pro proměnné x_1, x_2:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\geq -1 \end{aligned}$$

Problém 2. Jsou následující množiny konvexní? A pokud ano, jsou to konvexní kužele? A pokud ano, jsou to vlastní kužele? Své rozhodnutí zdůvodněte.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x - y)^2 + (y + z)^2 = 0\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \exists z \geq 0$ takové, že platí $x > z, y > z\}$

d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon$ vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od počátku je nejvýše rovná vzdálenosti bodu $\mathbf{x}$ od bodu $(2, -1, 7)\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \colon \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 1 \right\}$

Problém 3. Spočtěte konjugovanou funkci k následujícím funkcím (viz kapitola 3.3; rada: nechte se inspirovat obrázkem 3.8 v učebnici):

a) $f(x) = x^{3/2}$ s definičním oborem $\mathbb{R}_{++}$ (tj. $(0, \infty)$).

b) $g(x, y) = x^2 + y^2$

c) $h(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je pevně daný vektor.

Problém 4. Dokažte, že pokud $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny, tak také následující množiny jsou konvexní:

1. $2A = \{c \in \mathbb{R}^n : \exists a \in A,\ c = 2a\}$
2. $-A = \{c \in \mathbb{R}^n : -c \in A\}$
3. $A + B = \{c \in \mathbb{R}^n : \exists a \in A, \exists b \in B,\ a + b = c\}$

Problém 5. Zformulujte jako konvexní (nejlépe lineární) optimalizační problém (tj. ve formě "minimalizujte $f(x)$ za podmínek ...") následující úlohu:

Máte chemickou továrnu, kde se pracuje se čtyřmi typy látek A, B, C a D. Momentálně nemáte na skladě žádnou z látek, ale můžete nakupovat: Kilogram látky A stojí 3 Kč, kilogram látky B stojí 10 Kč a kilogram látky C stojí 100 Kč. Látka D je nebezpečný odpad, který se nedá nakupovat, ale musíte se ho zbavovat za cenu 1 Kč za uložený kilogram.

V továrně můžete provozovat následující tři typy reakcí (kde čísla jsou poměry váhy reaktantů a produktů, tj. $3A + 2B \to C + 4D$ značí, že můžete použít například 3 kg látky A and 2 kg látky B k výrobě 1 kg látky C a 4 kg látky D):

$$3A + 2B \to C + 4D$$
$$3B \to C$$
$$A + D \to B$$

Zákazník si objednal 1 tunu látky A, 4 tuny látky B a 3 tuny látky C. Jak zákazníkovi tyto látky dodat s co nejmenšími náklady (včetně ceny za zneškodnění odpadu D)? Vaše formulace nemusí popisovat realitu dokonale, ale měla by být dostatečně dobrá, aby byla užitečná.

Problém vyřešte pomocí knihovny CVXOPT pro Python a okomentujte, jak praktické vaše řešení je (tj. jak dobře odpovídá prakticky proveditelné posloupnosti nákupů a reakcí). Svůj program mi *pošlete* na e-mail kazda@karlin.mff.cuni.cz

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.