

## Sada 1 domácích úkolů

Termín odevzdání: 10. října 2017 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	1	
2	1	
3	2	
4	3	
5	3	
$\Sigma$	10	

**Problém 1.** Načrtněte konvexní množinu danou soustavou rovnic pro proměnné  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0 \\x_1 + x_2 &\leq 4 \\x_1 - x_2 &\geq -1\end{aligned}$$

**Problém 2.** Jsou následující množiny konvexní? A pokud ano, jsou to konvexní kužele? A pokud ano, jsou to vlastní kužele? Své rozhodnutí zdůvodněte.

a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$

b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x - y)^2 + (y + z)^2 = 0\}$

c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \exists z \geq 0 \text{ takové, že platí } x > z, y > z\}$

d)  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \text{vzdálenost bodu } \mathbf{x} \text{ od počátku je nejvýše rovná vzdálenosti bodu } \mathbf{x} \text{ od bodu } (2, -1, 7)\}$

e)  $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 1 \right\}$

**Problém 3.** Spočtete konjugovanou funkci k následujícím funkcím (viz kapitola 3.3; rada: nechte se inspirovat obrázkem 3.8 v učebnici):

a)  $f(x) = x^{3/2}$  s definičním oborem  $\mathbb{R}_{++}$  (tj.  $(0, \infty)$ ).

b)  $g(x, y) = x^2 + y^2$

c)  $h(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , kde  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  je pevně daný vektor.

**Problém 4.** Dokažte, že pokud  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  jsou konvexní množiny, tak také následující množiny jsou konvexní:

1.  $2A = \{c \in \mathbb{R}^n : \exists a \in A, c = 2a\}$

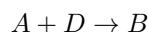
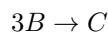
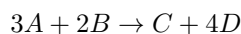
2.  $-A = \{c \in \mathbb{R}^n : -c \in A\}$

3.  $A + B = \{c \in \mathbb{R}^n : \exists a \in A, \exists b \in B, a + b = c\}$

**Problém 5.** Zformulujte jako konvexní (nejlépe lineární) optimalizační problém (tj. ve formě “minimalizujte  $f(x)$  za podmínek ...”) následující úlohu:

Máte chemickou továrnu, kde se pracuje se čtyřmi typy látek  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ . Momentálně nemáte na skladě žádnou z látek, ale můžete nakupovat: Kilogram látky  $A$  stojí 3 Kč, kilogram látky  $B$  stojí 10 Kč a kilogram látky  $C$  stojí 100 Kč. Látka  $D$  je nebezpečný odpad, který se nedá nakupovat, ale musíte se ho zbavovat za cenu 1 Kč za uložený kilogram.

V továrně můžete provozovat následující tři typy reakcí (kde čísla jsou poměry váhy reaktantů a produktů, tj.  $3A + 2B \rightarrow C + 4D$  značí, že můžete použít například 3 kg látky  $A$  a 2 kg látky  $B$  k výrobě 1 kg látky  $C$  a 4 kg látky  $D$ ):



Zákazník si objednal 1 tunu látky  $A$ , 4 tuny látky  $B$  a 3 tuny látky  $C$ . Jak zákazníkovi tyto látky dodat s co nejmenšími náklady (včetně ceny za zneškodnění odpadu  $D$ )? Vaše formulace nemusí popisovat realitu dokonale, ale měla by být dostatečně dobrá, aby byla užitečná.

Problém vyřešte pomocí knihovny CVXOPT pro Python a okomentujte, jak praktické vaše řešení je (tj. jak dobře odpovídá prakticky proveditelné posloupnosti nákupů a reakcí). Svůj program mi pošlete na e-mail [kazda@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kazda@karlin.mff.cuni.cz)

Při řešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.