Konvexní optimalizace

Cvičení 9

Problém 1. Uvažme hru kámen-nůžky-(papír), která se od známé hry liší tím, že první hráč může hrát kámen, nůžky i papír, ale druhý hráč může hrát jenom kámen a nůžky. Za výhru (kámen tupí nůžky stříhají papír balí kámen) dostane hráč 1 bod, za prohru -1 bod a za remízu 0 bodů. Jaké jsou strategie optimální v nejhorším případě pro oba hráče a kolik je hodnota této hry?

Problém 2. Zformulujte následující problém (minimalizace vůči lineární mrtvé zóně) ve tvaru lineárního programu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \sum_{i=1}^{m} \phi(u_i) \\ \text{za podmínek } & \mathbf{u} = A\mathbf{x} - b, \end{aligned}$$

kde $\phi(u) = 0$ pro $|u| < 1$ a $\phi(u) = |u| - 1$ jinak.

Problém 3. Uvažme problém aproximace vůči normě, kde neznáme matici A a pouze víme, že A může být jedna z matic A_1, A_2, A_3. Zformulujte problém "najděte $\mathbf{x}$ minimalizující $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ pro nejhorší možnou volbu $A \in \{A_1, A_2, A_3\}$" jako úlohu konvexní optimalizace.

Problém 4. Dokažte, že následující problém *není* kvazikonvexní: Zvolme A matici $n \times m$, $\mathbf{b}$ vektor dimenze n a $\epsilon > 0$ pevné. Problém zní:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte počet nenulových složek } & \mathbf{x} \\ \text{za podmínek } & \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \epsilon, \end{aligned}$$

Problém 5. Dokažte, že následující problém *je* kvazikonvexní: Zvolme A matici $n \times m$, $\mathbf{b}$ vektor dimenze n a $\epsilon > 0$ pevné. Problém zní:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & k \text{ takové, že } x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_m = 0 \\ \text{za podmínek } & \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \epsilon, \end{aligned}$$