Cvičení 8

Buď (P) optimalizační problém ve tvaru:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{za podmínek } & f_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Označme $\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i$. Buď (D) duál k (P). Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky pro pár primární řešení $\mathbf{x}^\star$ a duální řešení $(\lambda^\star, \nu^\star)$ jsou:

- $\mathbf{x}^\star$ je přípustné řešení (P)
- $(\lambda^\star, \nu^\star)$ je přípustné řešení (D)
- Pro každé $i = 1, \ldots, m$ platí $\lambda_i^\star f_i(\mathbf{x}^\star) = 0$
- Pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\partial L(\mathbf{x}^\star, \lambda^\star, \nu^\star)/\partial x_i = 0$

Věta 1. Pokud je $\mathcal{D}$ otevřená a všechny funkce f_i jsou všude diferencovatelné a konvexní, tak KKT jsou nutné a postačující podmínky pro to, aby $\mathbf{x}^\star$ bylo optimální řešení (P) a zároveň $(\lambda^\star, \nu^\star)$ bylo optimální řešení (D) s nulovou dualitní mezerou.

Problém 1. Uvažme problém rozdělení energie mezi n různých komunikačních kanálů, abychom maximalizovali tok informací.

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & -\sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha_i + x_i) \\ \text{za podmínek } & \sum x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \succeq 0, \end{aligned}$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kladné konstanty (popisující míru rušení na různých kanálech).

1. Přesvěčte se, že tato úloha splňuje Slaterovu podmínku.
2. Rozmyslete si, že optimální hodnota $\mathbf{x}^\star$ tohoto problému se nabývá.
3. Spočtěte Lagrangián k tomuto problému a zformulujte KKT podmínky.
4. Jak byste vyřešili (ne)rovnice z KKT podmínek, abyste z $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ spočetli $\mathbf{x}^\star$ a (λ, ν)? Rada: Nehledejte přesný vzoreček, spíše metodu nalezení řešení. Této úloze se také přezdívá úloha nalévání vody (water-filling problem).

Problém 2. Uvažme hru kámen-nůžky-(papír), která se od známé hry liší tím, že první hráč může hrát kámen, nůžky i papír, ale druhý hráč může hrát jenom kámen a nůžky. Za výhru (kámen tupí nůžky stříhají papír balí kámen) dostane hráč 1 bod, za prohru -1 bod a za remízu 0 bodů. Jaké jsou strategie optimální v nejhorším případě pro oba hráče a kolik je hodnota této hry?

Problém 3. Dokažte, že pokud je K vlastní konvexní kužel, tak $K^\star$ je konvexní uzavřená množna, ktera neobsahuje žadnou přímku procházející počatkem.