Cvičení 6

Problém 1. Dokážeme si, že duální kužel k S^n_+ v prostoru S^n symetrických matic $n \times n$ je zase S^n_+.

1. Dokažte (nebo si vzpomeňte), že pokud A, B jsou matice $n \times n$, tak $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. Ověřte, že pro každý vektor $\mathbf{v}$ je vnější/tenzorový součin $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ prvek S^n_+.
3. Definujeme $(S^n_+)^\star = \{A \in S^n : \forall B \in S^n_+, \mathrm{Tr}(BA) \geq 0\}$. Použijte předchozí dva body k důkazu, že $(S^n_+)^\star \subseteq S^n_+$.
4. Buďte $A, B \in S^n_+$. Použijte fakt, že existuje C taková, že $B = CC^T$, k důkazu, že $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$. Rozmyslete si, že z toho plyne $S^n_+ \subseteq (S^n_+)^\star$.

Problém 2. Dokažte, že pokud je K vlastní konvexní kužel, tak:

1. $K^\star$ je konvexní kužel,
2. $K^\star$ je uzavřená množina
3. $K^\star$ neobsahuje žádnou přímku procházející počátkem
4. $K^{\star\star} = K$ (bude se vám hodit oddělující nadrovina)
5. $K^\star$ má neprázdný vnitřek (budete potřebovat předchozí bod; můžete bez důkazu použít tvrzení, že pokud má konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$ prázdný vnitřek, tak je obsažená v nějaké nadrovině).
6. Vnitřek $K^\star$ je roven $\{\mathbf{u} : \forall \mathbf{v} \in K, \mathbf{u}^T\mathbf{v} > 0\}$