Cvičení 5

Problém 1. Zformulujte problém kuželového programování řádu 2

$$\begin{aligned}\text{minimalizujte } & t \\ \text{za podmínek } & \|(x_1, 2x_2+2)\|_2 \le t \\ & \|(1, x_2)\|_2 \le x_1 + 1\end{aligned}$$

jako ekvivalentní problém s jednou zobecněnou omezující podmínkou (kuželový program)

$$\begin{aligned}\text{minimalizujte } & \mathbf{c}^T\mathbf{y} \\ \text{za podmínek } & F\mathbf{y} + \mathbf{g} \preceq_K \mathbf{0}\end{aligned}$$

Rada: Kužel K zvolte šestirozměný tak, aby zahrnul dva kužele řádu 2 z původního programu.

Problém 2 (skalarizace nefunguje vždy)**.** Načrtněte v $\mathbb{R}^2$ (nekonvexní) množinu M, která obsahuje nějaký $\preceq$-minimální (vůči kuželu $\mathbb{R}^2_+$) bod $\mathbf{x}$ takový, že pro každé nenulové $\lambda \succeq \mathbf{0}$ obsahuje M nějaký bod $\mathbf{y}$ splňující $\lambda^T\mathbf{y} < \lambda^T\mathbf{x}$.

Problém 3. Dokážeme si, že duál k S^n_+ v prostoru S^n symetrických matic $n \times n$ je zase S^n_+.

1. Dokažte (nebo si vzpomeňte), že pokud A, B jsou $n \times n$ matice, tak $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. Ověřte, že kdykoli je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, tak vnější/tenzorový součin $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ leží v S^n_+.
3. Definujme $(S^n_+)^\star = \{A \in S^n : \forall B \in S^n_+, \mathrm{Tr}(AB) \ge 0\}$. Použijte předchozí dva body k důkazu, že pak nutně $(S^n_+)^\star \subseteq S^n_+$.
4. Buďte $A, B \in S^n_+$. Použijte fakt,že $B = CC^T$ pro vhodnou matici C k důkazu, že $\mathrm{Tr}(AB) \ge 0$ (a tedy $S^n_+ \subseteq (S^n_+)^\star$).

Problém 4. Dokažte, že pokud je K vlastní konvexní kužel, tak:

1. $K^\star$ je konvexní kužel,
2. $K^\star$ je uzavřená množina,
3. $K^\star$ neobsahuje žádnou přímku procházející počátkem.
4. Vnitřek $K^\star$ je roven $\{\mathbf{u} : \forall \mathbf{v} \in K, \mathbf{u}^T\mathbf{v} > 0\}$.
5. $K^{\star\star} = K$ (bude se vám hodit odělující nadrovina)
6. $K^\star$ má neprázdný vnitřek (budete potřebovat předchozí bod; můžete bez důkazu použít tvrzení, že pokud má konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$ prázdný vnitřek, tak je obsažená v afinním prostoru dimenze nejvýš $n-1$).