Cvičení 4

Problém 1. Mějme lineární lomený program P:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{x} + d}{\mathbf{e}^T\mathbf{x} + f} \\ \text{za podmínek } & G\mathbf{x} \preceq \mathbf{h} \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že víme, že P má optimální řešení (které splňuje i implicitní podmínku $\mathbf{e}^T\mathbf{x} + f > 0$). Náš cíl je P přepsat jako lineární program.

Přejmenujme $\mathbf{x}$ na $\mathbf{y}$ a vynásobme v P všechny konstantní členy pomocí nové promenné z, čímž dostaneme program Q:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{y} + dz}{\mathbf{e}^T\mathbf{y} + fz} \\ \text{za podmínek } & G\mathbf{y} \preceq \mathbf{h}z \\ & A\mathbf{y} = \mathbf{b}z. \end{aligned}$$

Upravte “polotovar” Q do tvaru lineárního programu, z jehož optimálního řešení $\mathbf{y}, z$ je možné vypočíst optimální řešení $\mathbf{x}$ pro P (budete muset přidat aspoň jednu podmínku, aby to fungovalo).

Problém 2. Odvoďte z nutné a postačující podmínky pro optimum všude diferencovatelné účelové funkce verzi Lagrangeových multiplikátorů pro konvexní problémy omezené na afinní množinu: Buď f všude diferencovatelná konvexní funkce a mějme konvexní problém P ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & f(\mathbf{x}) \\ \text{za podmínek } & \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Dokažte, že $\mathbf{x}$ je optimální řešení P, právě když existují $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ taková, že

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{a}_i \lambda_i = 0.$$

Rada: Udělejte si náčrtek.

Problém 3. Mějme lineární program

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podmínek } & {\mathbf{g}_i}^T \mathbf{x} \preceq h_i \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

kde se $\mathbf{g}_i$ mohou náhodně měnit (kvůli chybám měření, nejistotě na trzích ...). Náš cíl bude vyřešit P robustně, tj. tak, abychom tyto náhodné změny ustáli.

Mějme matice P_i a vektory $\overline{\mathbf{g}_i}$ takové, že pro každé i platí $\mathbf{g}_i \in \{\overline{\mathbf{g}_i} + P_i\mathbf{u} \colon \|u\|_2 \leq 1\}$ (tj. pro každý $\mathbf{g}_i$ máme elipsoid, ve kterém víme, že vektor $\mathbf{g}_i$ najdeme). Napište kuželový program druhého řádu, jehož přípustná řešení jsou vždy přípustná pro P s našimi náhodnými $\mathbf{g}_i$.

Problém 4. Buď f konvexní, s definičním oborem $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že pak:

1. Pro všechna $z \in \mathbb{R}^n$ je $f^{\star\star}(z) \leq f(z)$,
2. pokud bychom pro nějaké $z_0 \in \mathbb{R}^n$ měli $f^{\star\star}(z_0) < f(z_0)$, tak dostaneme spor (rada: pomůže vám podpůrná nadrovina).