Cvičení 3

Problém 1. Buď $f(\mathbf{x}) = \max\{\mathbf{c}_1^T\mathbf{x} + b_1, \ldots, \mathbf{c}_k^T\mathbf{x} + b_k\}$ konvexní po částech afinní funkce.

Vymyslete, jak přepsat problém "minimalizujte $f(\mathbf{x})$ za podmínek $A\mathbf{x} \preceq 0$" jako problém lineárního programování.

Problém 2. Dokažte, že pokud je P konvexní program a $\mathbf{x}$ je lokálně optimální řešení P, tak je $\mathbf{x}$ také (globálně) optimální řešení P.

Problém 3. Buď P konvexní program, X_{opt} množina optimálních řešení P. Dokažte, že X_{opt} je konvexní množina.

Problém 4. Dokažte pomocí Jensenovy nerovnosti nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem: Pro každou volbu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{++}$ platí

$$(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Problém 5. Buď f konvexní, s definičním oborem $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že pak:

1. Pro všechna $z \in \mathbb{R}^n$ je $f^{\star\star}(z) \leq f(z)$,
2. pokud bychom pro nějaké $z_0 \in \mathbb{R}^n$ měli $f^{\star\star}(z_0) < f(z_0)$, tak dostaneme spor (rada: pomůže vám podpůrná nadrovina).