Cvičení 2

Problém 1. Rozhodněte, zda je konvexní množina v $\mathbb{R}^n$:

1. Mříž $\mathbb{Z}^n$
2. Množina řešení soustavy nerovnic
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &\leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &\leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &\geq 1 \end{aligned}$$
3. Množina
$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2} \leq 3 \right\},$$
kde $\mathbf{a} = (1, 2, 3)^T$ a $\mathbf{b} = (10, 10, 10)^T$.

Problém 2. Rozhodněte, zda je konvexní/kvazikonvexní funkce:

1. $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = |x|$ pro $x \in \mathbb{R}$
3. $$f(x) = \begin{cases} x \log x & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}$$
4. $$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$
kde $x \in \mathbb{R}^2$.
5. $m(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
6. $m(x_1, \ldots, x_n) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Problém 3. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina s prázdným vnitřkem. Dokažte, že pak S je obsažená v afinním podprostoru $\mathbb{R}^n$ o dimenzi nejvýše $n - 1$.