Cvičení 13

Problém 1. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou samo-konkordované:

1. $x \ln x$
2. $x \ln x - \ln x$
3. $-\ln x$
4. $-1/27 \cdot \ln x$

Problém 2. Chceme vyřešit soustavu $(D + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro neznámý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde D je regulární diagonální matice $n \times n$ a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ známe. Řešení husté soustavy lineárních rovnic zabere $O(n^3)$ času, takže bychom si chtěli pomoci znalostí struktury soustavy.

1. Dokažte, že $\mathbf{x}$ řeší naši soustavu, právě když existuje t takové, že platí
$$\begin{pmatrix} D & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. Vymyslete jak soustavu z předchozího bodu vyřešit v čase $O(n)$.

Problém 3. Buď $P \succeq 0$ symetrická matice $n \times n$ a A matice $m \times n$ hodnosti m. Dokažte, že bloková matice
$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$
je regulární, právě když P je pozitivně definitní na jádru A.

Problém 4. Buď P pozitivně definitní matice $n \times n$, A matice $m \times n$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ vektory. Najděte vzorec (používající $P, A, A^T, P^{-1}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ a běžnou maticovou/vektorovou aritmetiku) pro řešení soustavy
$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}.$$