Problém. Buď $P \succeq 0$ symetrická matice $n \times n$ a A matice $m \times n$ hodnosti m. Dokažte, že bloková matice

$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

je regulární, právě když P je pozitivně definitní na jádru A.

Řešení: Předpokládejme, že ona bloková matice

$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

je regulární a nechť existuje $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ takový, že $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{u}^T P\mathbf{u} = 0$. Z druhé rovnosti a pozitivní semidefinitnosti P plyne, že $P\mathbf{u} = 0$. Proč tomu tak je: Protože $P \succeq 0$, tak P lze psát jako $P = Q^T Q$ pro nějakou matici Q a tedy $\mathbf{u}^T Q^T Q\mathbf{u} = 0$ implikuje, že $Q\mathbf{u} = \mathbf{0}$, což znamená $P\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Potom ale nutně

$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

což je spor s regularitou matice

$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Naopak nechť je $\mathbf{u}^T P\mathbf{u} > 0$ pro všechny nenulové prvky $\operatorname{Ker} A$ a předpokládejme, že máme $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ takové, že

$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Potom $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} A$. Ukážeme, že $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Uvažme první blok rovnosti výše:

$$P\mathbf{u} + A^T\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

a pronasobme ho $\mathbf{u}^T$ zleva:

$$\mathbf{u}^T P\mathbf{u} + \mathbf{u}^T A^T\mathbf{v} = 0.$$

Protože $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} A$, je $\mathbf{u}^T A^T = \mathbf{0}^T$, takže

$$\mathbf{u}^T P\mathbf{u} = 0.$$

Z pozitivní definitnosti P na $\operatorname{Ker} A$ dostáváme $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Nyní tedy platí $A^T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ale matice A^T má hodnost m a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, takže $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tedy jediný prvek jádra blokové matice

$$\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

je nulový vektor.