Konvexní optimalizace

Cvičení 10

Problém 1. Buď A náhodná matice taková, že a_{ij} jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s rozptylem 1.

Dokažte, že pak pro každé $\mathbf{x}$ je střední hodnota $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ rovna

$$\|(\mathbb{E}\, A)\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + n\|x\|_2^2.$$

Co z toho plyne pro stochastickou robustní aproximaci $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$?

Problém 2. Buď A $m \times n$ matice ve tvaru $A = U\Sigma V^T$, kde Σ je diagonální $r \times r$ s kladnými hodnotami $\sigma_1, \ldots, \sigma_r > 0$ a U, V jsou $m \times r$ a $n \times r$ matice s k ortonormálními sloupci (tj. $U^T U = V^T V = I$).

Definujeme pseudoinverz A jako $A^\dagger = V\Sigma^{-1}U^T$. Dokažte, že:

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(U)$, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(V^T)$
2. Pokud $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ je pevně zvolený vektor a $\mathbf{x}$ minimalizuje $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$, tak platí $\Sigma V^T \mathbf{x} = U^T \mathbf{b}$.
3. Vektor $\mathbf{x}^\star = A^\dagger \mathbf{b}$ je vektor s nejmenší 2-normou mezi všemi vektory, které minimalizují $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$.

Problém 3. Buď X pozitivně definitní matice $n \times n$. Uvažme množinu

$$E = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{z}^T X \mathbf{z} \le 1\}.$$

Množina E je elipsoid. Dokažte, že pro každé n existuje konstanta C_n taková, že objem E je roven $C_n\sqrt{\det X^{-1}}$.