

Cvičení 1

Problém 1. Minimalizujte $4x + 5y + 3z$ za podmínky $x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4$.

Problém 2. Najděte úlohu lineárního programování, která je:

- a) Nepřípustná.
- b) Přípustná, ale neomezená.
- c) Přípustná, omezená a má aspoň dvě optimální řešení.

Problém 3. Mějme k druhů akcií, které můžeme koupit. Cena i -tého druhu akcií je dnes c_i . Cena i -tého druhu akcií za rok je náhodná veličina, u níž známe (nebo si myslíme, že známe) střední hodnotu h_i a rozptyl σ_i .

Jsme (naivně) přesvědčení, že ceny akcií jsou nezávislé náhodné veličiny. Chceme investovat fixní rozpočet tak, aby očekávaná hodnota našich akcií za rok byla aspoň b a rozptyl této hodnoty byl co nejmenší.

Zformulujte úlohu jako optimalizační problém (nebude lineární).

Problém 4. Dokažte, že \mathbf{x}^* je optimální řešení úlohy “minimalizujte $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ ” (nejmenší čtverce) právě tehdy, když $A^T \mathbf{Ax}^* = A^T \mathbf{b}$.

Problém 5. Vyrábíme zmrzlinu jeden rok od ledna do prosince. Máme dobrý odhad poptávky po zmrzlině během roku: Pro i -tý měsíc roku značme z_i počet tun zmrzliny, které jsme daný měsíc schopni prodat.

Potíž je v tom, že poptávka se mění během roku. Můžeme zvyšovat a snižovat výrobu a zmrzlinu skladovat, ale obojí nás stojí peníze: Změna výroby o jednu tunu nahoru či dolů z měsíce na měsíc stojí c Kč a skladování tuny zmrzliny jeden měsíc stojí s Kč. Zformulujte (nejlépe lineární) optimalizační problém, který popisuje, jak pokrýt poptávku během roku (začínáme v lednu s prázdným skladem a končíme v prosinci také s prázdným skladem; pro jednoduchost předpokládáme, že výrobu v lednu si můžeme bezplatně nastavit, jak chceme) s minimálními náklady?

Rada: Na lineární formulaci úlohy potřebujete vymyslet trik, jak se zbavit absolutních hodnot.