

9. cvičení (29. listopadu 2007)

Co jsme dělali?

Obecně jsme si řekli, co je to grupa a řád prvku grupy. Dál jsme pracovali s grupou S_n všech permutací n prvků. Každou permutaci jde vyjádřit jako součin disjunktčních cyklů; několika různými způsoby jsme definovali znaménko permutace.

Příklady

-1. Vyjádři permutaci $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 5, 4 \mapsto 3, 5 \mapsto 1, 6 \mapsto 2$ jako součin disjunktčních cyklů, urči její řád a znaménko.

0. Vyjádři permutaci $(145)(5421)$ jako součin disjunktčních cyklů, urči její řád a znaménko.

1. Vyjádři permutaci $(14)(123)(45)(14)$ jako součin disjunktčních cyklů, urči její řád a znaménko.

2. Dokaž, že $|S_n| = n!$.

3. Dokaž, že cyklus sudé délky je lichá permutace a cyklus liché délky je sudá permutace. (HINT: dokaž to pro cykly tvaru $(12345\dots n)$ a použij 2. těžší příklad.)

4. Vyjádři permutaci $(1234)(765)^{-1}(261)(47)^{-1}$ jako součin disjunktčních cyklů, urči její řád a znaménko.

5. Kdy je grupa S_n komutativní?

6. Vyřeš rovnici $(23)\pi^{-1}(145) = (2513)$.

7. Označme $\pi = (1345)(267)$. Urči π^{2007} .

8. Dokaž, že každá permutace jde vyjádřit jako součin (ne nutně disjunktčních) transpozic (tedy cyklů délky 2).

9. Vyřeš $\pi^2 = (123456)$.

10. Vyřeš $\pi^2 = (123)(456)$.

Těžší příklady

1. Dokaž, že grupa S_n je generovaná prvky $(123\dots(n-1))$ a $((n-1)n)$.

2. Dokaž, že znaménko permutace se nezmění přejmenováním proměnných.