8. cvičení (22. 11. 2007)

Co jsme dělali?

Dělali jsme všechno možné, na co zatím nedošlo (:

Podívali jsme se na problémy v písemce, ukázali si, k čemu se hodí toto jednoduché tvrzení: je-li $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $F \in \mathbb{Z}[x]$ a $a \equiv b \pmod{m}$, pak $F(a) \equiv F(b) \pmod{m}$. Taky jsme si řekli, jak spolu souvisí násobné kořeny polynomu a kořeny jeho derivace.

A ukázali jsme si, proč je vlastně ten obor $\mathbb{Z}[i]$ zajímavý - pomocí něj jde totiž řešit diofantické rovnice.

Příklady

-1. Dokaž, že neexistuje polynom $F \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že $F(10) = 12, F(13) = 12$.

0. Všechna nesoudělná řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ taková, že x je liché, jsou tvaru $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$, kde a, b jsou nesoudělná celá čísla taková, že jedno z nich je sudé.

1. Najdi všechny násobné kořeny polynomů $x^2 - 2x + 1$ a $3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 5x^2 - 1$.

2. Dokaž, že polynom $F \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že $F(2007), F(2008)$ jsou lichá čísla, nemá žádný celočíselný kořen.

3. Dokaž, že je-li a k-násobný kořen polynomu f, je a $(k-1)$-násobný kořen jeho derivace f'.

4. Dokaž, že je-li $ab = u^n$ v nějakém oboru integrity s jednoznačným rozkladem na součin ireducibilních prvků, existují c, d taková, že $a || c^3$, $b || d^3$.

5. Najdi všechna nesoudělná řešení rovnice $x^4 + y^4 = z^2$.

6. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + 1 = y^3$.