3. cvičení (18. října 2007)

Co jsme dělali?

Pověděli jsme si, co je to kongruence, a uvedli si jejich základní vlastnosti. Taky jsme se zmínili o Eulerově funkci $\varphi(n)$, Eulerově věta a malé Fermatově větě.

A pak jsme řešili kongruence - jednak lineární kongruenci $ax \equiv b \pmod{m}$ a taky soustavu kongruencí tvaru $x \equiv b_i \ (\text{mod}\ m)_i$. O jejím řešení mluví čínská zbytková věta.

Příklady

-3. Dokaž, že $112|(835^5+6)^{18}-1$.

-2. $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) nejde vyjádřit jako součet čtverců (to znamená druhých mocnin) přirozených čísel.

-1. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $29x \equiv 1 \pmod{17}$.

0. Vyřeš soustavu $x \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{3}$.

1. Urči, kolik je $7^{20} \pmod{26}$.

2. Pro libovolná celá čísla a, b platí $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod{7}$.

3. Dokaž, že $13|2^{60}+7^{30}$.

4. Spočti $\varphi(420)$.

5. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $21x+5 \equiv 0 \pmod{29}$.

6. Vyřeš soustavu $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 8 \pmod{11}$, $3x \equiv 1 \pmod{7}$.

7. V závislosti na $a \in \mathbb{Z}$ urči $a^{101} \pmod{125}$.

8. Vyřeš soustavu $4x \equiv 1 \pmod{27}$, $5x \equiv 27 \pmod{51}$.

9. Mějme různá prvočísla p a q. Dokaž, že $p^{q-1}+q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

Těžší příklady

1. Vyřeš kongruenci $(a+b)x \equiv a^2+b^2 \pmod{ab}$, kde $a, b \in \mathbb{N}, (a,b)=1$.

2. $19 \cdot 8^n + 17$ je složené číslo.