České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra matematiky

Obor: Matematická informatika

Součiny prvočísel v aritmetických posloupnostech a prvočíslená věta

Diplomová práce

Autor: Bc. Jakub Hlavnička
Školitel: Mgr. Vítězslav Kala, Ph.D.
Odevzdáno : Květen 2016

Před svázáním místo téhle stránky $\boxed{\text{vložte zadání práce}}$ s podpisem dìkana (bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne ....

Bc. Jakub Hlavnička

Název práce:
Součiny prvočísel v aritmetických posloupnostech a prvočíslená věta

Autor: Bc. Jakub Hlavnička
Obor: Matematická informatika
Druh práce: Diplomová práce
Vedoucí práce: Mgr. Vítězslav Kala, Ph.D.
Katedra algebry, MFF UK, Sokolovská 83, 18675 Praha 8

Abstrakt: Cílem této práce je zobecnění nedávných výsledků z [2]. Původní výsledky se týkají asymptotického vyjádření hustoty součinů dvou prvočísel, pro které daný kvadratický charakter nabývá dané hodnoty. V této práci jsou výsledky zobecněny pro případ libovolných Dirichletových charakterů. Významným příkladem takových součinů jsou součiny dvou prvočísel, ležících v daných aritmetických posloupnostech. Značná část práce je věnována studiu známé teorie týkající se aplikací prvočíselné věty, která je pro zmíněné výsledky potřebná. Dále je v práci zobecněn výsledek z [2] pro případ tří prvočísel. Nakonec je v práci provedeno experimentální ověření výsledků vlastním programem napsaným v jazyce C s využitím knihovny GMP pro práci s velkými čísly.

Klíčová slova: aritmetické posloupnosti, prvočísla, teorie čísel

Title:
Products of primes in arithmetic sequences and prime number theorem

Author: Bc. Jakub Hlavnička

Abstract: The aim of this thesis is the generalization of recent results from [2]. These results are related to an asymptotic expression of the density of products pq of two primes, that a given quadratic character attains a given value at p and q. In this thesis those results are generalized to the case of general Dirichlet characters. The significant examples of those products are products of two primes each laying in a given arithmetic progression. The substantial part of this thesis is dedicated to known theory about applications of the prime number theorem necessary for mentioned results. In this thesis the result from [2] is also generalized to the case of three prime numbers. Finally, the results are experimentally verified using own program written in C language using GMP library for dealing with large numbers.

Key words: arithmetic progressions, primes, number theory

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Vítězslavu Kalovi za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Obsah

1 Základní pojmy **4**
1.1 Aritmetické funkce 4
1.2 Dirichletův součin 7
1.3 Charaktery 9
1.4 Asymptotická notace 11

2 Aplikace prvočíselné věty **13**
2.1 Odhady součtů přes prvočísla 13
2.2 Odhady součtů přes prvočísla s Dirichletovými charaktery 19
2.3 Asymptotika součinu dvou prvočísel 25
2.4 Asymptotika součinu k prvočísel 27

3 Asymptotika součinů prvočísel a charaktery **34**
3.1 Součiny dvou prvočísel a kvadratické charaktery 34
3.2 Součiny dvou prvočísel a obecné Dirichletovy charaktery 38
3.3 Součiny tří prvočísel a kvadratické charaktery 42

4 Výpočty **48**

Úvod

Jedním z hlavních cílů a motivací analytické teorie čísel je studium funkce π, která pro reálné x určuje počet prvočísel menších než toto x a jejíž přibližným vyjádřením se zabývá známá prvočíselná věta. Obecněji se dá říct, že analytická teorie čísel je matematická disciplína, ve které se zkoumají vlastnosti funkcí, které nějakým způsobem popisují určitou vlastnost spočetné množiny, typicky množiny přirozených čísel nebo všech prvočísel a které nelze vyjádřit jednoduchým způsobem pomocí známých funkcí z matematické analýzy. Nejčastěji takové funkce vyjádříme jako součet známých funkcí a chybového členu, jehož hodnotu dokážeme pomocí známých funkcí odhadnout seshora. Při studiu analytické teorie čísel se setkáme s pojmem Dirichletova charakteru, který spadá do oboru obecné algebry. Dirichletovým charakterem se rozumí libovolný homomorfismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ a jedná se o jeden z ústředních pojmů této práce.

Hlavním cílem a přínosem práce je zobecnění výsledků od Dummita, Granvilla a Kisilevského. V jejich nedávném článku [2] se podařilo určit explicitní odhad hustoty

$$\frac{\#\{pq \leq x : \chi(p) = \chi(q) = 1\}}{\#\{pq \leq x\}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{L_\chi + o(1)}{\log\log x}.$$

kde χ značí kvadratický charakter, který nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, -1\}$ a L_χ značí konvergentní řadu $\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$. Hlavním přínosem a původním výsledkem je zobecnění explicitního odhadu z [2] na případ obecného Dirichletova charakteru ve větě 3.2.1. Nejprve ovšem podrobně vyložíme teorii potřebnou k důkazům zmíněných výsledků.

Kapitola 1 je v jistém smyslu stavebním kamenem pro další části práce. Prozkoumáme v ní některé obecné vlastnosti aritmetických funkcí (zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$), vlastnosti operací definovaných mezi aritmetickými funkcemi (např. Dirichletův součin) a uvedeme některé konkrétní příklady aritmetických funkcí, jež najdou uplatnění ve zbytku práce. V posledních sekcích se budeme věnovat již zmíněným Dirichletovým charakterům a zavedeme asymptotickou notaci.

Podstatnou částí kapitoly 2 je odvození asymptotických vyjádření $\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p}$ a $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}$, které dále v kapitole najde využití při odvození asymptotiky počtu součinů dvou prvočísel nepřevyšujících reálné x. Dále v kapitole odvodíme asymptotické vyjádření pro $\sum_{p\leq x} \frac{\chi(p)\log p}{p}$ a $\sum_{p\leq x} \frac{\chi(p)}{p}$, kde χ nyní značí netriviální Dirichletův charakter. Tyto asymptotiky najdou aplikaci v důkazu původního výsledku v kapitole 3. Na konci 2 . kapitoly odvodíme asymptotiku počtu součinů k prvočísel menších než reálné x.

Kapitola 3 je hlavní částí této práce. Nejdříve v ní dokážeme zmíněný výsledek z [2] a vyslovíme ho v silnější verzi. V důkazu se využívá připravená teorie z kapitoly 2 a za přínos lze považovat i mnohem podrobnější zpracování než je v původním článku. Zpracování důkazu je podrobnější i ve srovnání s výzkumným úkolem [3]. Hlavním benefitem je ovšem zobecnění výsledku pro obecný Dirichletův charakter χ. Konkrétně tedy určíme explicitní odhad hustoty

$$\frac{\#\{pq \leq x : \chi(p) = \chi(q) = c\}}{\#\{pq \leq x\}} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{C}{\log\log x} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right) \tag{1}$$

kde c je nenulové komplexní číslo, kterého daný charakter χ pro nějaké prvočíslo nabývá, n značí počet všech vzájemně různých nenulových hodnot, kterých charakter nabývá a C je konstanta, která je definovaná pomocí nově zavedené řady. Toto zobecnění vyžadovalo dokázat několik souvisejících tvrzení ve větší obecnosti. Největším úskalím důkazu je nutnost práce s polynomem g definovaným vztahem (3.12). Tvar věty 3.2.1 velmi zjednodušila skutečnost, že se podařilo určit koeficienty polynomu g a dále určit jeho funkční hodnoty v bodech $\chi(p)$, kde χ je nyní libovolný Dirichletův charakter a p libovolné prvočíslo. Pomocí těchto funkčních hodnot se zjednoduší tvar nově definované řady, která vystupuje v explicitním odhadu. Dalším přínosem je zobecnění (1) pro případ $\chi(p) = e$ a $\chi(q) = f$, kde e a f jsou obecně různá komplexní čísla. V závěru kapitoly jsme nastínili důkaz podobné asymptotiky pro tři prvočísla.

V poslední kapitole se věnujeme experimentálnímu ověření výsledků z kapitoly 3. Především zde porovnáváme skutečné hodnoty podílu (1) s jeho explicitním odhadem. Z věty 3.2.1 plyne, že chyba explicitního odhadu od skutečné hustoty je funkce z $O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)$ a v práci vysvětlíme, proč nebude explicitní odhad hustoty dávat příliš dobré výsledky pro taková x, pro která jsme schopni spočítat skutečnou hodnotu hustoty. Dále bylo potřeba učinit přibližné výpočty nově definovaných řad, které se vyskytují v explicitních odhadech. Výpočty byly provedeny v jazyce C v knihovně GMP, určené pro práci s velkými čísly.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Aritmetické funkce

V následující sekci definujeme potřebné aritmetické funkce (zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$) a dokážeme několik tvrzení, které budeme v dalším textu používat. Následující definice aritmetické funkce μ a věta popisující její vlastnost pocházejí ze sekce 2.2 v [1].

Definice 1.1.1. *Möbiovu funkci μ pro $n = 1$ definujeme jako $\mu(1) = 1$. Pro $n > 1$ můžeme psát $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ a μ definujeme následujícím způsobem:*

$$\begin{aligned} &\mu(n) = -1^k && \text{pokud } a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1, \\ &\mu(n) = 0 && \text{jinak.} \end{aligned}$$

Věta 1.1.2. *Pro $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$$

Důkaz. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Pro $n > 1$ označíme $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$. Protože v sumě $\sum_{d|n} \Lambda(d)$ vznikají nenulové členy pouze v případě $d = 1$ nebo pro dělitele takových n, které jsou součiny různých prvočísel.

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) =& \mu(1) + \mu(p_1) + \ldots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \ldots + \mu(p_{k-1} p_k) + \\ &+ \ldots + \mu(p_1 p_2 \ldots p_k) \\ &1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \ldots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0. \end{aligned}$$

□

Dále definujeme Von-Mangoldtovu funkci Λ a vyslovíme větu potřebnou v dalším textu. Jako zdroj byla použita sekce 2.8 z [1].

Definice 1.1.3. *Pro* $n \in \mathbb{N}$ *definujeme*

$$\Lambda(n) = \log p \qquad \textit{pokud } n = p^m, \textit{ pro prvočíslo } p \textit{ a } m \in \mathbb{N}$$
$$\Lambda(n) = 0 \qquad \textit{jinak }.$$

Věta 1.1.4. *Pro* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Důkaz. Pro $n = 1$ tvrzení věty zřejmě platí. Uvažujme tedy $n > 1$ a označme

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}.$$

Zlogaritmováním dostaneme

$$\log n = \sum_{k=1}^{r} a_k \log p_k.$$

Protože v sumě $\sum_{d|n} \Lambda(d)$ jsou jediné nenulové členy dělitelé d tvaru p_k^m pro $m = 1, 2, \ldots, a_k$ a $k = 1, 2, \ldots, r$, můžeme psát

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \log p_k = \sum_{k=1}^{r} a_k \log p_k = \log n$$

a důkaz je u konce. □

Následující věta pro obecné aritmetické funkce má kruciální význam v odvozování asymptotických vztahů v kapitole 2. Větu jsme převzali ze sekce 4.2 v [1].

Věta 1.1.5. *Pro libovolnou aritmetickou funkci a položme*

$$A(y) = \sum_{n \le y} a(n),$$

kde $A(y) = 0$ *pokud* $y < 1$. *Nechť je dána* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *která má spojitou derivaci na intervalu* $[x, y]$, *kde* $0 < x < y$. *Pak*

$$\sum_{x < n \le y} a(n) f(n) = A(y) f(y) - A(x) f(x) - \int_x^y A(t) f'(t) dt.$$

Důkaz. Nechť $k = \lfloor y \rfloor$ and $m = \lfloor x \rfloor$. Platí tedy $A(y) = A(k)$ a $A(x) = A(m)$ a můžeme psát

$$\begin{aligned}
\sum_{x<n\le y} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} \{A(n) - A(n-1)\}f(n) = \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) = \qquad (1.1)\\
&= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)\{f(n) - f(n+1)\} + A(k)f(k) - A(m)f(m+1).
\end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne z $A(n) - A(n-1) = a(n)$. Protože platí $f(n) - f(n+1) = -\int_n^{n+1} f'(t)dt$, výraz (1.1) je roven

$$\begin{aligned}
&- \sum_{n=m+1}^{k} A(n) \int_n^{n+1} f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) = \\
&= - \sum_{n=m+1}^{k} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) = \qquad (1.2)\\
&= - \int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1).
\end{aligned}$$

Protože platí rovnosti

$$\begin{aligned}
&A(y)f(y) - \int_k^y A(t)f'(t)dt = A(y)f(y) - A(k) \int_k^y f'(t) = \\
&= A(y)f(y) + A(k)f(k) - A(k)f(y) = A(k)f(k)
\end{aligned}$$

a rovnosti

$$\begin{aligned}
&- A(x)f(x) - \int_x^{m+1} A(t)f'(t)dt = -A(x)f(x) - A(m) \int_x^{m+1} f'(t) = \\
&= -A(x)f(x) + A(m)f(m+1) - A(m)f(x) = A(m)f(m+1),
\end{aligned}$$

k dokončení důkazu stačí přepsat (1.2) jako

$$\begin{aligned}
&- \int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(y)f(y) - \int_k^y A(t)f'(t)dt \\
&- A(x)f(x) - \int_x^{m+1} A(t)f'(t)dt = \qquad (1.3)\\
&= A(y)f(y) - A(x)f(x) - \int_x^y A(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Nakonec dokážeme obecnější větu z analýzy, kterou využijeme při důkazu vztahu (2.1). Větu čtenář nalezne v sekci 3.3 v [1].

Věta 1.1.6. *Nechť má funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spojitou derivaci* f' *na intervalu* $[y, x]$, *kde* $0 < y < x$, *pak*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)dt +$$
$$+ f(x)(\lfloor x \rfloor - x) + f(y)(\lfloor y \rfloor - y).$$

Důkaz. Označme $m = \lfloor y \rfloor$ a $k = \lfloor x \rfloor$. Pro čísla n a $n-1$ v $[y, x]$ platí

$$\int_{n-1}^{n} \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (n-1) f'(t)\mathrm{d}t = (n-1)\{f(n) - f(n-1)\} =$$
$$\{nf(n) - (n-1)f(n-1)\} - f(n).$$

Sečtením od $m+1$ do k získáme

$$\int_{m+1}^{k} \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = kf(k) - (m+1)f(m+1) - \sum_{n=m+2}^{k} f(n) =$$
$$= kf(k) - mf(m+1) - \sum_{y<n\leq x} f(n),$$

a platí tedy

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} f(n) &= \int_{m+1}^{k} \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t + kf(k) - mf(m+1) = \\ &= - \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t) + kf(x) - mf(y).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Integrací per partes dostaneme vztah

$$\int_y^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x) - yf(y) - \int_y^x tf'(t)\mathrm{d}t,$$

jehož kombinací s (1.4) dokončíme důkaz věty. □

1.2 Dirichletův součin

Mezi aritmetickými funkcemi lze definovat různé operace. Díky následujícím dvěma definicím dokážeme důsledek 1.2.5, který využijeme v důkazu důležitých asymptotik v kapitole 2. V celé následující sekci jsou jako zdroj použity sekce 2.6 a 2.14 z [1].

Definice 1.2.1. *Pro dvě aritmetické funkce f a g definujeme Dirichletův součin jako aritmetickou funkci h danou vztahem*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Dirichletův součin budeme značit jako $h = f * g$.

O operaci $*$ se v literatuře často mluví jako o Dirichletově konvoluci. Další definice je inspirována Dirichletovým součinem a v jistém smyslu ho zobecňuje pro kombinace reálné funkce s aritmetickou.

Definice 1.2.2. *Nechť je dána funkce $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ taková, že $F(x) = 0$ pro $0 < x < 1$. Pro libovolnou aritmetickou funkci α definujeme funkci $\alpha \circ F$*

$$(\alpha \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Následující věta svazuje právě definované operace $*$ a $\circ$ zajímavou rovností.

Věta 1.2.3. *Pro dvě libovolné aritmetické funkce α a β a libovolnou funkci F z definice 1.2.2 platí*

$$\alpha \circ (\beta \circ F) = (\alpha * \beta) \circ F.$$

Důkaz. Pro $x \geq 0$ platí

$$\begin{aligned}\{\alpha \circ (\beta \circ F)\}(x) &= \sum_{n \leq x} \alpha(n) \sum_{m \leq \frac{x}{n}} \beta(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{mn \leq x} \alpha(n)\beta(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) = \\ &= \sum_{k \leq x} \left(\sum_{n|k} \alpha(n) \beta\left(\frac{k}{n}\right)\right) F\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k \leq x} (\alpha * \beta)(k) F\left(\frac{x}{k}\right) = \\ &= \{(\alpha * \beta) \circ F\}(x).\end{aligned}$$

□

Následující věta dává vztah pro sumu aritmetické funkce získané jako Dirichletův součin dvou jiných aritmetických funkcí.

Věta 1.2.4. *Nechť jsou dány aritmetické funkce f, g, $h = f * g$ a*

$$H(x) = \sum_{n \leq x} h(n), F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \text{ a } G(x) = \sum_{n \leq x} g(n).$$

Pak

$$H(x) = \sum_{n \leq x} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} g(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Důkaz. Definujeme funkci U jako

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{pokud } x \geq 1. \end{cases}$$

V důkazu využijeme větu 1.2.3, která dává do vztahu operace $\circ$ a $*$. Zřejmě je $F = f \circ U$, $G = g \circ U$ a důkaz ukončí vztahy

$$\begin{aligned} f \circ G &= f \circ (g \circ U) = (f * g) \circ U = H \\ g \circ F &= g \circ (f \circ U) = (g * f) \circ U = H. \end{aligned}$$

□

Z věty 1.2.4 plyne při stejném značení funkcí důsledek, který bude užitečný v další teorii.

Důsledek 1.2.5. *Pro $x \geq 1$ platí*

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n \leq x} f(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \tag{1.5}$$

Důkaz. Ve větě 1.2.4 stačí položit $g(n) = 1$ pro přirozená n a $G(x) = \lfloor x \rfloor$. □

1.3 Charaktery

V této sekci přistoupíme k definici charakteru a uvedeme několik jeho vlastností, které jsou v této práci důležité.

Definice 1.3.1. *Nechť G je konečná Abelova grupa. Homomorfismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ nazveme charakter na G ($\mathbb{C}^\times$ značí multiplikativní grupu nenulových komplexních čísel).*

Protože pro prvek identity e zřejmě platí $\chi(e) = 1$ a pro libovolný prvek $a \in G$, $a \neq 1$ je $a^n = 1$, platí $\chi(a)^n = 1$. Hodnoty charakteru tedy jsou odmocniny z jedné a pro jejich absolutní hodnotu platí $|\chi(g)| = 1$ pro všechna $g \in G$. Triviální charakter χ_0 definujeme pro $g \in G$ jako $\chi_0(g) = 1$. V sekci 6.5 v [1] lze nalézt důkaz tvrzení, že konečná Abelova grupa G má právě n různých charakterů. Množinu všech charakterů na G označíme jako $\widehat{G}$. Pro libovolné dva charaktery $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$ lze definovat charakter $\chi_1\chi_2$ předpisem $\chi_1\,\chi_2(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ pro $g \in G$. Pro $\chi \in \widehat{G}$ je inverzní prvek $\bar{\chi}$ definovaný $\bar{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$. Struktura s takto definovanou operací mezi charaktery tvoří konečnou Abelovu grupu. Následující věta ukazuje zajímavou vlastnost charakterů a její důkaz může být nalezen v sekci 2.1 v [3].

Věta 1.3.2. *Nechť je G konečná Abelova grupa řádu n. Pak platí*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} n & \textit{pokud } \chi = \chi_0, \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

většinou se nepracuje s obecnými charaktery dle definice 1.3.1, ale s charaktery, kdy jako grupu G uvažujeme multiplikativní grupu zbytkových tříd modulo N.

Definice 1.3.3. *Nechť $d \in \mathbb{N}_0$ a $G = (\mathbb{Z}/d)^\times$ buď multiplikativní grupa zbytkových tříd modulo d. Ke každému charakteru χ na G definujeme aritmetickou funkci $\tilde{\chi}$ pro $n \in \mathbb{Z}$ následujícím způsobem:*

$$\tilde{\chi}(n) = \chi(n) \qquad \textit{pokud } (n,d) = 1$$
$$\tilde{\chi}(n) = 0 \qquad \textit{pokud } (n,d) > 1.$$

Funkci $\tilde{\chi}$ nazveme Dirichletův charakter modulo d.

Protože v dalším textu nebudeme pracovat s jiným chrakterem než s Dirichletovým, budeme pro Dirichletův charakter místo $\tilde{\chi}$ používat značení χ. Z věty 1.3.2 plyne platnost důležité rovnosti pro libovolný Dirichletův charakter podle definice 1.3.3:

$$\sum_{a=0}^{d} \chi(g) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{pokud } \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Následující jednoduché tvrzení popisuje tvar množiny oboru hodnot Dirichletova charakteru.

Tvrzení 1.3.4. *Nechť je χ libovolný Dirichletův charakter modulo d. Označme $H = \{\chi(a) | a \in \{1, \ldots, d-1\}, (a,d) = 1\}$ a $n = \#H$. Pak platí*

$$H = \left\{ \exp\left(\frac{2\pi i j}{n}\right) \mid j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Důkaz. Uvedeme pouze stručný postup důkazu. Protože je $|\chi(a)| = 1$ je H podmnožina jednotkové kružnice o které navíc víme, že je konečná. Vybereme $\alpha_0 \in [0,1)$, minimální takové, že $\exp(2\pi i \alpha_0) \in H$. Sporem snadno ukážeme, že $\alpha_0 = \frac{1}{m}$. Inkluze

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i j}{n}\right) \mid j \in \{1, \ldots, n\} \right\} \subseteq H$$

plyne z uzavřenosti H na násobení. Opačnou inkluzi ukážeme opět sporem. Zřejmě je $m = n$. □

Nyní bude následovat lemma, které je výsledkem vlastní práce a jehož smysl se nám ukáže až v důkazu věty 3.2.1

Lemma 1.3.5. *Nechť je χ libovolný Dirichletův charakter modulo d. Označme $H = \{\chi(a) | a \in \{1, \ldots, d-1\}, (a,d) = 1\}$ a $n = \#H$. Pak charakter χ^j není triviální pro žádné $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že χ^j je triviální charakter pro nějaké $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pak pro všechna $a \in \mathbb{Z}$ nesoudělná s d platí

$$\chi(a)^j - 1 = 0.$$

Tedy polynom $x^j - 1$ má za kořeny všechny prvky z H. Ale jeho stupeň je $j < n$ a to je spor. □

Nakonec uvedeme příklad netriviálního Dirichletova charakteru, který využijeme v kapitole 3. Pro tento účel budeme potřebovat definici Jacobiho a Legendrova symbolu.

Definice 1.3.6. *Buď p liché prvočíslo. Pro $(n, p) = 1$ definujeme Legenderův symbol $\left(\frac{n}{p}\right)$ následujícím způsobem:*

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{pokud } x^2 \equiv n \mod p \text{ má řešení} \\ -1 & \text{pokud } x^2 \equiv n \mod p \text{ nemá řešení}\,. \end{cases}$$

Pokud je $(n, p) > 1$, definujeme $\left(\frac{n}{p}\right) = 0$. Nyní můžeme přistoupit k definici obecnějšího Jacobiho symbolu. definujeme symbol $\left(\frac{n}{d}\right)$ pro liché $d \in \mathbb{N}$ s prvočísleným rozkladem $d = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ jako:

$$\left(\frac{n}{d}\right) = \left(\frac{n}{p_1}\right)^{a_1} \dots \left(\frac{n}{p_k}\right)^{a_k}.$$

Nakonec můžeme definovat kvadratický charakter χ pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ a liché $d \in \mathbb{N}$ jako

$$\chi(n) = \left(\frac{n}{d}\right). \tag{1.7}$$

Je potřeba ověřit, že takto definovaný charakter splňuje definici Dirichletova charakteru. Ověření lze nalézt v sekci 2.2 v [3].

1.4 Asymptotická notace

V celé následující sekci, budeme uvažovat, že f a g jsou komplexní funkce reálné proměnné. Nyní připomeneme známé asymptotické značení. Budeme psát

$$f \in O(g(x)),$$

pokud

$$(\exists K > 0)(\exists x_0 \in \mathbb{R}) \text{ tak, že } \forall x > x_0 \text{ platí } |f(x)| < K|g(x)|. \tag{1.8}$$

Pokud jsou funkce f a g nezáporné a spojité, můžeme v definici (1.8) vždy uvažovat $x_0 = 0$. Předpokládejme, že (1.8) platí pro $x_0 > 0$, protože $|f|$ a $|g|$ jsou spojité, nabývají na kompaktu $(0, x_0]$ svého maxima a můžeme zvolit K tak, že (1.8) platí pro $x_0 = 0$. Podobně budeme značit

$$f \in o(g(x)),$$

pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in \mathbb{R}) \text{ tak, že } \forall x > x_0 \text{ platí } |f(x)| < \varepsilon|g(x)|.$$

S využitím definovaného značení nakonec můžeme zavést značení

$$f \sim g,$$

pokud

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

Z definice snadno plyne vlastnost, kterou budeme v textu neustále využívat. Pokud $f \in O(F(x))$ a $g \in O(G(x))$, pak $f(x) + g(x) \in O(F(x) + G(x))$.

Nakonec uvedeme vlastnost, jenž může působit vykonstruovaně, ale kterou mnohokrát využijeme v kapitolách 2 a 3. Pokud jsou f, F reálné funkce a h rostoucí nezáporná reálná funkce, platí

$$f(x) \in O\left(F(x)\right) \implies \sum_{p \leq h(x)} f\left(\frac{x}{p}\right) \in O\left(\sum_{p \leq h(x)} F\left(\frac{x}{p}\right)\right), \tag{1.9}$$

kde sčítáme přes prvočísla p. Vztah (1.9) platí, protože můžeme zvolit $x_0 = 0$ a implicitní konstanta v $O\left(F(x)\right)$ nezávisí na p.

Pro případy, kdy budeme v definici $f(x) \in O(g(x))$ potřebovat zdůraznit hodnotu konstanty K zavedeme značení $f(x) \in O_1(g(x))$ znamenající, že

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tak, že } \forall x > x_0 \text{ platí } |f(x)| < |g(x)|.$$

a budeme psát

$$f \in O_1(Kg(x)).$$

Kapitola 2

Aplikace prvočíselné věty

2.1 Odhady součtů přes prvočísla

V následující sekci jsou nejdříve dokázána tvrzení, které jsou potřeba při odvozování asymptotik pro $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$ a $\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}$. Jedná se o věty 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, které pocházejí ze sekce 3.11 v [1] a lemma 2.1.4 ze sekce 4.6 v [1].

Věta 2.1.1. *Pro $x \ge 1$ platí*

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = 1$$

a

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = \log(\lfloor x\rfloor!).$$

Důkaz. Ze vztahu (1.5) v důsledku 1.2.5 dostaneme s využitím věty 1.1.2 přímo

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\mu(d)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = \sum_{n\le x}\left\lfloor\frac{1}{n}\right\rfloor = 1$$

a s využitím věty 1.1.4

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = \log(\lfloor x\rfloor!)$$

□

Věta 2.1.2. *Pro $x \ge 2$ platí*

$$\log(\lfloor x\rfloor!) = x\log x - x + O_1(2\log x) \tag{2.1}$$

a

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = x\log x - x + O_1(2\log x), \tag{2.2}$$

Důkaz. Ve větě 1.1.6 položíme $f(t) = \log t$ a snadným výpočtem určitého integrálu získáme

$$\sum_{n\le x}\log(n) = \int_1^x \log t \,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - (x-\lfloor x\rfloor)\log x =$$
$$= x\log x - x + 1 + \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t + O_1(\log x).$$

Protože platí

$$\int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\mathrm{d}\,t = O_1\left(\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}\,t\right) = O_1(\log x),$$

vztah (2.1) je dokázán. Platnost vztahu (2.2) plyne z věty 2.1.1. □

Věta 2.1.3. *Pro $x \ge 2$ platí*

$$\sum_{p\le x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p = x\log x + O_1(5x).$$

Důkaz. Protože je $\Lambda(n) = 0$ pokud n není mocnina jednoho prvočísla, můžeme psát

$$\sum_{n\le x}\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor\Lambda(n) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{p\\ p^m\le x}}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\Lambda(p^m).$$

Dvojitou sumu můžeme přepsat jako

$$\sum_{p\le x}\sum_{m=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p = \sum_{p\le x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p + \sum_{p\le x}\sum_{m=2}^{+\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p$$

Dokážeme, že druhá suma je funkce z $O(x)$. S využitím součtu geometrické řady dostaneme

$$\sum_{p\le x}\log p\sum_{m=2}^{+\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor \le x\sum_{p\le x}\log p\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^m = x\sum_{p\le x}\log p\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}} =$$
$$= x\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p(p-1)} \le x\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n(n-1)} = O(x),$$

kde poslední rovnost plyne z konvergence řady $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n(n-1)}$.
Ukázali jsme, že

$$\sum_{p\le x}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor\Lambda(n) = \sum_{p\le x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p + O(x).$$

Ze vztahu (2.2) dostaneme

$$x \log x - x + O(\log x) = \sum_{p \le x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p + O(x).$$

Platí tedy

$$\sum_{p \le x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p = x \log x + O_1(K_1 x),$$

kde

$$K_1 = 2 + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n(n-1)} = 3 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n(n-1)}.$$

Protože platí

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n(n-1)} < 2,$$

konstantu K_1 můžeme seshora odhadnout 5. □

Lemma 2.1.4. *Nechť je $(a(n))_1^{+\infty}$ nezáporná posloupnost reálných čísel taková, že*

$$\sum_{n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + O_1(Bx) \tag{2.3}$$

pro všechna $x \ge 1$ a konstantu $B > 0$. Pak:

1. *Pro $x \ge 1$ platí*

$$\sum_{n \le x} a(n) = O_1(Cx), \tag{2.4}$$

kde $C = 2B + 4 \log 2$.

2. *Pro $x \ge 1$ platí*

$$\sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} = \log x + O_1(C).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme první bod tvrzení. Pro tento účel definujeme

$$S(x) = \sum_{n \le x} a(n)$$

a

$$T(x) = \sum_{n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor .$$

Nejdříve dokážeme nerovnost

$$S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) \le T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right). \tag{2.5}$$

Pravou stranu (2.5) rozepíšeme jako

$$\begin{aligned} T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor a(n) - 2 \sum_{n \le \frac{x}{2}} \left\lfloor \frac{x}{2n} \right\rfloor a(n) = \\ &= \sum_{n \le \frac{x}{2}} \left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{x}{2n} \right\rfloor \right) a(n) + \sum_{\frac{x}{2} \le n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor a(x). \end{aligned}$$

Protože $\lfloor 2y \rfloor - 2\lfloor y \rfloor$ je buď 0 nebo 1, je první suma nezáporná a nerovnost (2.5) dokazuje

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) \ge \sum_{\frac{x}{2} \le n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor a(x) = \sum_{\frac{x}{2} \le n \le x} a(x) = S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right).$$

Z předpokladu (2.3) máme pro $x \ge 1$

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = x \log x + O(x) - 2\left(\frac{x}{2} \log \frac{x}{2} + O(x)\right) = O_1((2\log 2 + B)x).$$

Z nerovnosti (2.5) plyne $S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) = O(x)$. Pro libovolné přirozené n tedy platí nerovnost

$$S\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - S\left(\frac{x}{2^n}\right) \le (\log 2 + B)\frac{x}{2^{n-1}}.$$

Nerovnosti sečteme přes všechna přirozená n a dostaneme

$$S(x) \le Kx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = (4\log 2 + 2B)x.$$

Ukážeme druhý bod tvrzení. Protože platí $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left(\frac{x}{n}\right) + O(1)$, můžeme s využitím (2.4) psát

$$\begin{aligned} T(x) = \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor a(n) = \sum_{n \le x} \left(\frac{x}{n} + O(1)\right) a(n) = x \sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} + O\left(\sum_{n \le x} a(n)\right) = \\ = x \sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} + O(x). \end{aligned}$$

Využitím předpokladu (2.3) dostaneme

$$\sum_{n\leq x}\frac{a(n)}{n}=\frac{1}{x}T(x)+O(1)=\log x+O(1)$$

a důkaz je u konce. □

Nyní můžeme přistoupit k odvození slibovaných asymptotik. Najdou využití ve větě 2.3.3 a ve stěžejních větách práce v kapitole 3. Tvrzení mohou být nalezena v sekcích 4.8 a 4.9 v [1].

Věta 2.1.5. *Pro $x\geq 1$ platí*

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O_1(13). \tag{2.6}$$

Důkaz. Dokázaný vztah z věty 2.1.3

$$\sum_{p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p=x\log x+O(x)$$

můžeme přepsat do tvaru

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor=x\log x+O(x), \tag{2.7}$$

kde Λ_1 je definovaná jako

$$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\log p & \text{pokud } n \text{ je prvočíslo p,}\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Protože je $\Lambda_1(n)\geq 0$ a platí vztah (2.7), z věty 2.1.4 plyne

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O_1(K_2), \tag{2.8}$$

kde $K_2=2\cdot 5+4\log 2<13$. □

Věta 2.1.6. *Existuje konstanta A tak, že platí*

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log x+A+O\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{2.9}$$

Důkaz. Označme

$$A(x) = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p}$$

a

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \text{ je prvočíslo,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n}$$

a

$$A(x) = \sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} \log n.$$

Položíme-li ve větě 1.1.5 $f(t) = \frac{1}{\log t}$, dostaneme

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t.$$

Z věty 2.1.5 máme $A(x) = \log x + R(x)$, kde $R(x) = O(1)$. Můžeme tedy psát

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \frac{\log x + O(1)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + R(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t =$$
$$= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \log t} + \int_2^x \frac{R(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t.$$

Zřejmě platí

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \log t} = \log\log x - \log\log 2$$

a

$$\int_2^x \frac{R(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t.$$

Z rovnosti $R(x) = O(1)$ dostaneme

$$\int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t = O\left(\int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} \mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Získáme tedy rovnost dokazující tvrzení věty

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$\square$

Nakonec uvedeme bez důkazu podobné asymptotiky pro prvočísla ležící v aritmetických posloupnostech. Tato věta může být nalezena v sekci 4.3 v [4].

Věta 2.1.7. *Nechť a a d jsou přirozená čísla taková, že $(a,d)=1$. Pak existuje reálná konstanta D tak, že pro $x \geq 2$ platí*

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \mod d}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(d)}\log x + O(1) \tag{2.10}$$

a

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \mod d}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(d)}\log\log x + D + O\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{2.11}$$

V důkazech vět 3.1.3 a 3.2.1 budeme potřebovat slabší verzi věty 2.1.7, která dává odhady

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \mod d}} \frac{\log p}{p} = O(\log x) \tag{2.12}$$

a

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \mod d}} \frac{1}{p} = O(\log\log x). \tag{2.13}$$

2.2 Odhady součtů přes prvočísla s Dirichletovými charaktery

Nyní dokážeme důležitou větu, která je v podobná větě 2.1.5 a 2.1.6, navíc ale pracuje s netriviálními Dirichletovými charaktery. Tato věta i její triviální důsledek 2.2.3 je jeden z pilířů důkazu věty 3.1.3 a věty 3.2.1. Důkaz pochází ze sekce 4.3 v [4]. Pro tento účel ještě budeme potřebovat známý odhad střední hodnoty Von-Mangoldtovy funkce, jenž představuje následující věta ze sekce 8.1 v [5]. Jsou známy i přesnější odhady, ale uvádíme následující důkaz, který je zajímavý tím, že je elementární.

Věta 2.2.1. *Platí*

$$\sum_{d\leq x}\Lambda(d) = O(x).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$\prod_{p\leq n} p < 4^n. \tag{2.14}$$

Pro libovolné $m \geq 1$ označíme

$$M = \binom{2m+1}{m}.$$

Máme

$$2M = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} < \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k+1} = 2^{2m+1}$$

a tedy platí

$$M < 4^m$$

Pokud je p prvočíslo splňující $m+2 \leq p \leq 2m+1$ pak p dělí produkt

$$(2m+1)2m(2m-1)\dots(m+2).$$

Zřejmě tedy p dělí M a produkt

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p$$

také dělí M. Platí tedy nerovnost

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p \leq M < 4^m \tag{2.15}$$

pro všechna přirozená čísla m. Dokážeme nerovnost (2.14) indukcí na n. Nerovnost zřejmě platí pro $n = 1$ a $n = 2$. Nechť je $n \geq 3$ a předpokládejme, že (2.14) platí pro všechna přirozená $m < n$. Pro n sudé je

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p < 4^{n-1} < 4^n.$$

Je-li n liché, lze ho vyjádřit jako $n = 2m+1$ pro nějaké $m \geq 1$ a s využitím nerovnosti 2.15 a indukčního předpokladu můžeme psát

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p < 4^{m+1} 4^m = 4^{2m+1} = 4^n.$$

tvrzení věty nyní snadno získáme z nerovnosti

$$\sum_{d \leq x} \Lambda(d) = \sum_{d \leq n} \Lambda(d) = \log \prod_{p \leq n} p < n \log 4 \leq x \log 4,$$

kde jsme položili $n = \lfloor x \rfloor$. $\square$

Existuje silnější verze věty 2.2.1, jež říká, že

$$\sum_{d\leq x} \Lambda(d) \sim x.$$

Tato verze je ekvivalentní s prvočíselnou větou ve tvaru

$$\{p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

a proto lze mluvit o větě 2.2.2 jako o důsledku prvočíselné věty. Důkaz této ekvivalence lze nalézt v sekci 4.4 v [1]. Nyní můžeme přistoupit k cílové větě této sekce.

Věta 2.2.2. *Nechť je χ netriviální Dirichletův charakter. Pak pro všechna $x \geq 2$ platí*

$$\sum_{n\leq x} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} = O\left(1\right), \tag{2.16}$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\chi(p)\log p}{p} = O\left(1\right), \tag{2.17}$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\chi(p)}{p} = b(\chi) + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \tag{2.18}$$

kde

$$b(\chi) = \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p}$$

je konečná konstanta.

Důkaz. Napřed ukážeme, že

$$\sum_{n\leq x} \frac{\chi(n)\log(n)}{n} = -L'(1,\chi) + O\left(\frac{\log x}{x}\right). \tag{2.19}$$

Položíme-li $S(x) = \sum_{n\leq x} \chi(n)$, dostaneme z věty 1.1.5

$$\sum_{x<n\leq y} \frac{\chi(n)\log(n)}{n} = S(y)\frac{\log(y)}{y} - S(x)\frac{\log(x)}{x} - \int_x^y S(t)\frac{1-\log t}{t^2}dt.$$

Ze vztahu (1.6) plyne, že S je periodická a z vlastností charakteru odvodíme, že je omezená konstantou $\varphi(n)$

$$\left|\int_x^{+\infty} S(t)\frac{1-\log t}{t^2}dt\right| \leq \int_x^{+\infty} \left|S(t)\frac{1-\log t}{t^2}\right| dt \leq -\int_x^{+\infty} \varphi(n)\frac{1-\log t}{t^2}dt = \varphi(n)\frac{\log x}{x}.$$

Z omezenosti $S(y)$ dále plyne

$$\lim_{y\to\infty} S(y)\frac{\log(y)}{y} = 0.$$

Můžeme tedy psát rovnosti

$$\sum_{n>x} \frac{\chi(n)\log(n)}{n} = \lim_{y\to+\infty} \sum_{x<n\leq y} \frac{\chi(n)\log(n)}{n} = -S(x)\frac{\log(x)}{x} - \int_x^{+\infty} S(t)\frac{1-\log t}{t^2}dt =$$
$$= O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

kde implicitní konstanta je rovna $\varphi(n)+1$. Rovnosti spolu s faktem, že $L'(1,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)\log(n)}{n}$ dokazují (2.19).
Protože je $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$, levá strana vztahu (2.19) přejde v

$$\sum_{md\leq x} \frac{\chi(md)\Lambda(d)}{md} = \sum_{d\leq x} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \sum_{m\leq \frac{x}{d}} \frac{\chi(m)}{m}. \tag{2.20}$$

Vnitřní sumu můžeme rozepsat jako

$$\sum_{m\leq y} \frac{\chi(m)}{m} = L(1,\chi) - \sum_{m>y} \frac{\chi(m)}{m}, \tag{2.21}$$

přičemž druhý člen odhadneme pomocí věty 1.1.5 jako

$$\sum_{m>y} \frac{\chi(m)}{m} = \frac{S(y)}{y} - \int_y^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}dt = O\left(\frac{1}{y}\right),$$

neboť platí odhad

$$\left|\int_y^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}dt\right| \leq \int_y^{+\infty} \left|\frac{S(t)}{t^2}\right| dt \leq K\int_y^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}dt = \frac{K}{y}.$$

Dosazením (2.21) do (2.20) získáme

$$-L'(1,\chi) + O\left(\frac{\log x}{x}\right) = L(1,\chi)\sum_{d\leq x} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} + O\left(\frac{1}{x}\sum_{d\leq x} \frac{\chi(d)\Lambda(d)d}{d}\right) =$$
$$= L(1,\chi)\sum_{d\leq x} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} + O\left(\frac{1}{x}\sum_{d\leq x} \Lambda(d)\right) = L(1,\chi)\sum_{d\leq x} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} + O(1),$$

kde poslední rovnost plyne z věty 2.2.1. Protože $L(1,\chi)\neq 0$, máme

$$\sum_{d\leq x} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} = \frac{-L'(1,\chi)}{L(1,\chi)} + \frac{1}{L(1,\chi)}O(1) + \frac{1}{L(1,\chi)}O\left(\frac{\log x}{x}\right) = O(1).$$

Vztah (2.17) odvodíme ze vztahu (2.16) odhadnutím rozdílu obou vztahů

$$\left|\sum_{\substack{p\le x\\ k>1}} \frac{\chi(p^k)\log p}{p^k}\right| \le \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} = O\left(1\right).$$

Vztah (2.18) odvodíme ze vztahu (2.17) podobným způsobem jako v důkazu věty 2.1.6. Označme

$$A(x) = \sum_{p\le x} \frac{\chi(p)\log p}{p}$$

a

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \text{ je prvočíslo,}\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pak

$$\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)}{p} = \sum_{n\le x} \frac{a(n)\chi(n)}{n}$$

a

$$A(x) = \sum_{n\le x} \frac{a(n)\chi(n)}{n} \log n.$$

Položíme-li ve větě 1.1.5 $f(t) = \frac{1}{\log t}$, dostaneme

$$\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)}{p} = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2}\mathrm{d}t. \tag{2.22}$$

Z dokázaného vztahu (2.17) máme $A(x) = O(1)$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x} \frac{\chi(p)}{p} &= \frac{O(1)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2}\mathrm{d}t = \\ &= O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Zřejmě platí

$$\int_2^x \frac{A(t)}{t(\log t)^2}\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{A(t)}{t(\log t)^2}\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} \frac{A(t)}{t(\log t)^2}\mathrm{d}t.$$

Z rovnosti $A(x) = O(1)$ dostaneme

$$\int_x^{+\infty} \frac{A(t)}{t\left(\log t\right)^2}\mathrm{d}t = O(1)\int_x^{+\infty} \frac{1}{t\left(\log t\right)^2}\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

V rovnosti (2.22) uděláme limitní přechod $x \to +\infty$ a získáme rovnost

$$\int_2^{+\infty} \frac{A(t)}{t\,(\log t)^2}\mathrm{d}t = \sum_p \frac{\chi(p)}{p} = b(\chi). \tag{2.23}$$

Konvergence řady plyne z konvergence integrálu na levé straně rovnosti (2.23) a důkaz je tedy ukončen. □

Z věty 2.2.2 plyne následující důsledek, který využijeme v dalším textu.

Důsledek 2.2.3. *Platí odhad*

$$\sum_{p>x} \frac{\chi(p)}{p} = O\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{2.24}$$

Následující lemma je velmi důležité pro důkaz věty 3.1.3 i její obecnější verze 3.2.1.

Lemma 2.2.4. *Nechť je χ libovolný Dirichletův charakter modulo d. Označme $H = \{\chi(a) | a \in \{1,\dots,d-1\}, (a,d)=1\}$ a $n = \#H$. Pak pro $j \in \{1,\dots,n-1\}$ platí odhad*

$$\left|\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)^j}{p\log(x/p)} - \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)^j}{p\log(x)}\right| = O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right).$$

Důkaz.

$$\left|\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)^j}{p\log(x/p)} - \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)^j}{p\log(x)}\right| = \left|\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)^j \log p}{p\log(x/p)\log x}\right|.$$

Z lemmatu 1.3.5 plyne, že χ^j je také netriviální charakter a pro přehlednost budeme tento obecně jiný Dirichletův charakter značit jako χ. Budeme tedy odhadovat sumu

$$\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)\log p}{p\log(x/p)}.$$

Definujeme-li opět aritmetickou funkci a jako charakteristickou funkci množiny všech prvočísel a zavedeme-li značení

$$A(x) = \sum_{n\le x} \frac{a(n)\chi(n)}{n}\log n$$

a $f(t) = \frac{1}{\log\frac{x}{n}}$, dostaneme z věty 1.1.5 rovnost

$$\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)\log p}{p\log(x/p)} = A(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) - \int_1^{\sqrt{x}} A(t)f'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{\chi(p)\log p}{p\log\left(\sqrt{x}\right)} + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{A(t)}{t\left(\log\frac{x}{t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Protože z věty 2.2.2 máme $\frac{\chi(p)\log p}{p} = O(1)$ a určitý integrál můžeme odhadnout jako

$$\left| \int_1^{\sqrt{x}} \frac{A(t)}{t\left(\log \frac{x}{t}\right)^2} \mathrm{d}t \right| \leq \int_1^{\sqrt{x}} \frac{O(1)}{t\left(\log \frac{x}{t}\right)^2} \mathrm{d}t \leq O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right) \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \leq O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

máme celkem

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(p)\log p}{p \log(x/p)} = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

a důkaz věty je u konce. □

2.3 Asymptotika součinu dvou prvočísel

V následující sekci odvodíme asymptotiku pro součin dvou prvočísel. Nejprve uvedeme prvočíselnou větu ve svém silnějším tvaru, kterou budeme dále v práci.

Věta 2.3.1. *Platí*

$$\#\{p \leq x\} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Důkaz této zásadní věty nebudeme pro jeho délku uvádět. Zájemci ho mohou nalez- nout v sekci 6.2 v [4]. Pro účel odvození asymptotiky součinu dvou prvočísel budeme potřebovat následující jistě známé lemma, které je však výsledkem vlastní práce.

Lemma 2.3.2. *Nechť jsou dány $j, m \in \mathbb{N}$, pak platí odhad*

$$\left| \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p\left(\log \frac{x}{p}\right)^m} - \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p(\log x)^m} \right| = O\left(\frac{1}{(\log x)^m}\right).$$

Důkaz. S využitím věty 2.1.6 provedeme odhad dokazující lemma

$$\left| \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p\left(\log \frac{x}{p}\right)^m} - \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p(\log x)^m} \right| = \left| \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\left[(\log x)^m - \left(\log \frac{x}{p}\right)^m\right]}{p\left(\log \frac{x}{p}\right)^m (\log x)^m} \right|$$

$$= \left| \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\log p \left[(\log x)^{m-1} + (\log x)^{m-2}\left(\log \frac{x}{p}\right) + \ldots + \left(\log \frac{x}{p}\right)^{m-1}\right]}{p\left(\log \frac{x}{p}\right)^m (\log x)^m} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \left| \frac{(m-1)\log p (\log x)^{m-1}}{p\left(\log \sqrt{x}\right)^m (\log x)^m} \right| = \frac{2^m(m-1)}{(\log x)^{m+1}} \left(\frac{1}{2}\log x + O(1)\right) = O\left(\frac{1}{(\log x)^m}\right).$$

□

Nyní můžeme přistoupit k odvození asymptotiky součinu dvou prvočísel, při němž využijeme právě dokázaného lemmatu a věty 2.3.1. Tento důkaz je inspirovaný důkazem slabší asymptotiky, jejíž důkaz je naznačen v [4], ale jako celek je opět výsledkem vlastní práce.

Tvrzení 2.3.3. *Platí*

$$\#\{pq \leq x | p \leq q\} = \frac{x \log\log x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Důkaz. Z definice funkce π a prvočíselné věty máme

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \sum_{p \leq q \leq x/p} 1 = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) - \sum_{p \leq \sqrt{x}} \pi(p) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{p \log \frac{x}{p}} + O\left(\frac{x}{p\left(\log \frac{x}{p}\right)^2}\right)\right) \\ - \sum_{p \leq \sqrt{x}} \left(\frac{p}{\log p} + O\left(\frac{p}{\log p}\right)\right). \tag{2.25}$$

Platí odhad

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{p}{\log p} = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

protože

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{p}{\log p} \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{\log \sqrt{x}} \leq \frac{2x}{\log x}.$$

Pomocí lemmatu 2.3.2 můžeme nahradit sumu

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p \log \frac{x}{p}}$$

výrazem

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p \log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

a sumu

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p \left(\log \frac{x}{p}\right)^2}$$

výrazem

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p(\log x)^2} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Protože díky vztahu (1.9) z kapitoly 1 je

$$\sum_{p\le\sqrt{x}} O\left(\frac{x}{p\left(\log\frac{x}{p}\right)^2}\right) = O\left(\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{x}{p\left(\log\frac{x}{p}\right)^2}\right),$$

můžeme s pomocí odhadu z věty 2.1.6 psát

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{x}{p\log\frac{x}{p}} + O\left(\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{x}{p\left(\log\frac{x}{p}\right)^2}\right) = \\
&= \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{x}{p\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) + O\left(\sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{x}{p(\log x)^2} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)\right) = \\
&= \frac{x\log\log x}{\log x} - \frac{x\log 2}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) + O\left(\frac{x\log\log x}{(\log x)^2} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)\right) = \\
&= \frac{x\log\log x}{\log x} + O\left(\frac{x\log\log x}{(\log x)^2}\right).
\end{aligned}$$

Ale protože platí

$$\frac{x\log\log x}{(\log x)^2} \in O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

je důkaz tvrzení u konce. □

2.4 Asymptotika součinu k prvočísel

V následující sekci zobecníme prvočíselnou větu na součin k prvočísel. Jako zdroj je v celé sekci použita sekce 9.4 z [5]. Pro tento případ bude potřeba zadefinovat několik pojmů. Nejprve definujeme dvě aritmetické funkce ω a Ω: $\omega(n) = k$, právě když je číslo n dělitelné právě n různými prvočísly a $\Omega(n) = l$, právě když je n dělitelné l ne nutně různými prvočísly. Označíme-li tedy rozklad n na součin prvočísel jako $n = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$, je $\omega(n) = k$ a $\Omega(n) = a_1 + \ldots + a_k$. Díky právě definovaným aritmetickým funkcím můžeme zavést užitečné značení

$$\pi_k(x) = \sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)=\Omega(n)=k}} 1$$

a

$$\pi_k^*(x) = \sum_{\substack{n\le x\\ \Omega(n)=k}} 1.$$

Cílem této sekce je ve větě 2.4.4 odvodit asymptotiku

$$\pi_k(x) \sim \pi_k^*(x) \sim \frac{x(\log\log)^{k-1}x}{(k-1)!\log x}.$$

Množinu všech uspořádaných k-tic prvočísel budeme značit $\mathbb{P}^k$. Jako $r_k(n)$ označíme počet reprezentací n pomocí uspořádaného součinu k ne nutně různých prvočísel:

$$r_k(n) = \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k = n}} 1.$$

Zřejmě pro všechna $n \geq 1$ platí

$$0 \leq r_k(n) \leq k!.$$

S takto definovaným značením vyslovíme a dokážeme sérii lemmat, které nakonec využijeme v důkazu kýžené asymptotiky.

Lemma 2.4.1. *Nechť $k \geq 1$ a*

$$\Pi_k^*(x) = \sum_{n\leq x} r_k(n) = \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k \leq x}} 1.$$

Pak

$$k!\pi_k(x) \leq \Pi_k^*(x) \leq k!\pi_k^*(x) = O(x).$$

Pro $k \geq 2$ platí

$$0 \leq \pi_k^*(x) - \pi_k(x) \leq \Pi_{k-1}^*(x).$$

Důkaz. Platí

$$\Pi_k^*(x) = \sum_{n\leq x} r_k(n) \leq k! \sum_{\substack{n\leq x \\ r_k(n)>0}} 1 = k!\pi_k^*(x) \leq k!x$$

a

$$\Pi_k^*(x) = \sum_{n\leq x} r_k(n) \geq k! \sum_{\substack{n\leq x \\ r_k(n)=k!}} 1 = k!\pi_k(x).$$

Nechť $k \geq 2$. Funkce $\pi_k^*(x) - \pi_k(x)$ počítá počet přirozených čísel $n \leq x$, které můžeme napsat jako produkt k prvočísel, ale ne jako produkt k různých prvočísel. Zřejmě jde o čísla tvaru $n = p_1 \cdots p_{k-2}p_{k-1}^2$, kde opět prvočísla nemusí být nutně různá. Proto

$$\begin{aligned}
\pi_k^*(x) - \pi_k(x) &\leq \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_{k-1})\in\mathbb{P}^{k-1} \\ p_1\cdots p_{k-1}^2 \leq x}} 1 \leq \\
&\leq \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_{k-1})\in\mathbb{P}^{k-1} \\ p_1\cdots p_{k-1} \leq x}} 1 = \Pi_{k-1}^*(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.4.2. *Nechť* $S_0(x) = 1$. *Pro* $k \geq 1$ *definujme*

$$S_k(x) = \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k \leq x}} \frac{1}{p_1 \cdots p_k}.$$

Pak

$$S_k(x) \sim (\log\log x)^k$$

a

$$S_k(x) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} S_{k-1}\left(\frac{x}{p}\right).$$

Důkaz. Platí

$$S_1(x) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \sim \log\log x$$

a tedy

$$S_1\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \sim \log\log x^{\frac{1}{k}} \sim \log\log x$$

pro všechna $k \geq 1$. Protože platí odhady

$$\begin{aligned}\left(S_1\left(x^{\frac{1}{k}}\right)\right)^k = \left(\sum_{p\leq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{p}\right)^k &= \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_i \leq x^{\frac{1}{k}}}} \frac{1}{p_1 \cdots p_k} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k \leq x}} \frac{1}{p_1 \cdots p_k} = S_k(x) \leq \\ &\leq \left(\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\right)^k = S_1(x)^k,\end{aligned}$$

je

$$S_k(x) \sim (\log\log x)^k.$$

Zřejmě platí rovnosti

$$
\begin{aligned}
S_k(x) &= \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_{k-1},p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_{k-1}p_k\le x}} \frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}p_k} = \\
&= \sum_{p_k\le x}\frac{1}{p_k} \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_{k-1})\in\mathbb{P}^{k-1} \\ p_1\cdots p_{k-1}\le \frac{x}{p_k}}} \frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}} = \\
&= \sum_{p_k\le x}\frac{1}{p_k} S_{k-1}\left(\frac{x}{p_k}\right)
\end{aligned}
$$

a důkaz lemmatu je ukončen. □

Lemma 2.4.3. *Pro* $k\ge 1$ *definujeme*

$$
\vartheta_k(x) = \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k\le x}} \log(p_1\cdots p_k).
$$

Pak

$$
\vartheta_k(x)\sim kx(\log\log x)^{k-1}.
$$

Důkaz. Pro $\vartheta_k(x)$ můžeme psát rekurentní vztah

$$
\begin{aligned}
k\vartheta_{k+1}(x) &= \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_{k+1})\in\mathbb{P}^{k+1} \\ p_1\cdots p_{k+1}\le x}} k\log(p_1\cdots p_{k+1}) = \\
&= \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k\le x}} \sum_{j=1}^{k+1}\log\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{k+1} p_i\right) = \\
&= \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_{k+1})\in\mathbb{P}^{k+1} \\ p_1\cdots p_{k+1}\le x}} (k+1)\log p_1\cdots p_k = \\
&= (k+1)\sum_{p_{k+1}\le x}\ \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k\le \frac{x}{p_{k+1}}}} \log p_1\cdots p_k = \\
&= (k+1)\sum_{p\le x}\vartheta_k\left(\frac{x}{p}\right).
\end{aligned}
$$

Pro $k\ge 1$ položme

$$
F_k(x) = \vartheta_k(x) - kxS_{k-1}(x).
$$

Pak s použitím lemma 2.4.2 získáme rekurentní vztah pro $F_k(x)$

$$\begin{aligned}
kF_{k+1}(x) &= k\vartheta_{k+1}(x) - k(k+1)xS_k(x) = \\
&= (k+1)\sum_{p\le x}\vartheta_k\left(\frac{x}{p}\right) - k(k+1)\sum_{p\le x}\frac{x}{p}S_{k-1}\left(\frac{x}{p}\right) = \\
&= (k+1)\sum_{p\le x}\left(\vartheta_k\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{kx}{p}S_{k-1}\left(\frac{x}{p}\right)\right) = \\
&= (k+1)\sum_{p\le x}F_k\left(\frac{x}{p}\right)
\end{aligned}$$

Indukcí dokážeme, že

$$F_k(x) = o(x(\log\log x)^{k-1}). \tag{2.26}$$

Pro $k=1$ máme z prvočíselné věty

$$F_1(x) = \vartheta(x) - x = o(x).$$

Předpokládejme, že (2.26) platí pro nějaké $k \ge 1$. Pro libovolné ε existuje x_0 tak, že

$$|F_k(x)| \le \varepsilon x(\log\log x)^{k-1}$$

pro všechna $x \ge x_0$. Platí tedy

$$\sum_{p\le \frac{x}{x_0}} F_k\left(\frac{x}{p}\right) \le \varepsilon x(\log\log x)^{k-1}\sum_{p\le\frac{x}{x_0}}\frac{1}{p} \le 2\varepsilon x(\log\log x)^k$$

pro $x \ge x_1 \ge x_0$, protože pro tato x je

$$\sum_{p\le\frac{x}{x_0}}\frac{1}{p} \le \log\log x + \varepsilon\log\log x.$$

Protože jsou funkce θ_k a S_{k-1} pro $x \ge 1$ nezáporné a rostoucí, je funkce $F_k(x)$ omezená na libovolném konečném intervalu. Existuje tedy konstanta $M_1 = M_1(\varepsilon)$ tak, že

$$|F_k(x)| \le M_1$$

pro $1 \le x \le x_1$ Proto můžeme psát nerovnosti

$$\begin{aligned}
k\,|F_{k+1}(x)| &= (k+1)\left|\sum_{p\le x}F_k\left(\frac{x}{p}\right)\right| \le \\
&\le (k+1)\sum_{p\le\frac{x}{x_0}}\left|F_k\left(\frac{x}{p}\right)\right| + (k+1)\sum_{\frac{x}{x_0}\le p\le x}\left|F_k\left(\frac{x}{p}\right)\right| \le \\
&\le 2(k+1)\varepsilon x(\log\log x)^k + (k+1)M_1\pi(x) \le \\
&\le 4k\varepsilon x(\log\log x)^k + 2kM_1x.
\end{aligned}$$

Vydělením nerovnosti k dostaneme pro dostatečně velké x

$$F_{k+1} = O(\varepsilon x(\log\log x)^k)$$

a vztah (2.26) je dokázán. Nyní můžeme s využitím lemmatu 2.4.2 psát

$$\begin{aligned}\vartheta_k(x) &= kxS_{k-1}(x) + F_k(x) = \\ &= kx(\log\log x)^{k-1} + o(x(\log\log x)^{k-1})\end{aligned}$$

a důkaz tvrzení je u konce. □

Věta 2.4.4. *Pro* $k \geq 1$

$$\pi_k(x) \sim \pi_k^*(x) \sim \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!\log x}.$$

Důkaz. Z definice $\vartheta_k(x)$ zřejmě máme

$$\vartheta_k(x) = \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_k)\in\mathbb{P}^k \\ p_1\cdots p_k\leq x}} \log p_1\cdots p_k = \sum_{n\leq x} r_k(n)\log n.$$

Připomeňmě, že z lemma 2.4.1 lze funkci $\Pi_k^*(x)$ odhadnout jako

$$\Pi_k^*(x) = \sum_{n\leq x} r_k(n) = O(x). \tag{2.27}$$

Nyní můžeme aplikovat větu 1.1.5 na funkci $\vartheta_k(x)$ a výpočtem jednoduchého integrálu a dosazením (2.27) dostaneme

$$\begin{aligned}\vartheta_k(x) &= \Pi_k^*(x) - \int_1^x \frac{\Pi_k^*(t)}{t}\mathrm{d}t = \\ &= \Pi_k^*(x)\log x + O(x).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Vyjádřením $\Pi_k^*(x)$ z (2.28) a aplikací lemmatu 2.4.3 získáme

$$\Pi_k^*(x) = \frac{\vartheta_k(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \sim \frac{kx(\log\log x)^{k-1}}{\log x}.$$

Pro $k \geq 2$ je

$$\Pi_{k-1}^*(x) = o\left(\Pi_k^*(x)\right). \tag{2.29}$$

Z lemmatu 2.4.1 máme

$$\Pi_k^*(x) \leq k!\pi_k^*(x) \leq k!\pi_k(x) + k!\Pi_{k-1}^*(x) \leq \Pi_k^*(x) + k!\Pi_{k-1}^*(x).$$

Z předchozí nerovnosti a vztahu (2.29) dostaneme $\pi_k(x) = \frac{\Pi_k^*(x)}{k!} + o\left(\frac{\Pi_k^*(x)}{k!}\right)$ a můžeme tedy psát

$$\pi_k^*(x) \sim \pi_k(x) \sim \frac{\Pi_k^*(x)}{k!}$$

Nakonec ze vztahu (2.28) a lemma 2.4.3 dostaneme

$$\frac{\Pi_k^*(x)}{k!} \sim \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!\log x}$$

a důkaz věty je u konce.

□

Kapitola 3

Asymptotika součinů prvočísel a charaktery

V následující kapitole se budeme zabývat opět distribucí součinů prvočísel, ale nyní budeme uvažovat pouze prvočísla, které pro daný Dirichletův charakter nabývají dané hodnoty. Hlavní motivací je požadavek na přesný odhad hustoty prvočísel ležících v aritmetických posloupnostech. V následující sekci je podrobně vysvětlen nedávný výsledek pro kvadratické charaktery, který byl předlohou pro jeho zobecnění.

3.1 Součiny dvou prvočísel a kvadratické charaktery

Následující lemma bude užitečné v důkazech vět 3.1.3 a 3.2.1.

Lemma 3.1.1. *Nechť χ je libovolný Dirichletův charakter modulo d. Nechť je dána konstanta $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, pro kterou existuje $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ tak, že $\chi(a) = c$. definujme $H = \{\chi(a) | a \in \{1, \ldots, d-1\}, (a, d) = 1\}$ a množinu všech $b \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, takových že $\chi(b) = c$, označme jako $R_{c,d,\chi}$. Pak*

$$\#H\#R_{c,d,\chi} = \varphi(d).$$

Důkaz. Rovnost plyne z faktu, že Dirichletův charakter nabývá každé nenulové hodnoty stejněkrát. □

V následujícím lemmatu, které je prvním původním výsledkem v práci, se poprvé objevuje již několikrát zmíněná souvislost mezi charaktery a aritmetickými posloupnostmi.

Lemma 3.1.2. *Nechť χ je libovolný Dirichletův charakter modulo d. Nechť je dána konstanta $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, pro kterou existuje $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ tak, že $\chi(a) = c$. definujme $H = \{\chi(a) | a \in \{1, \ldots, d-1\}, (a, d) = 1\}$. Pak platí*

$$\#\{p \leq x | \chi(p) = c\} = \frac{1}{\#H} \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Důkaz. Nechť $R_{c,d,\chi}$ má stejný význam jako v lemmatu 3.1.1. Je-li $\chi(a) = c$, pak charakter χ zobrazí všechna prvočísla p kongruentní s a mod d na c. S využitím prvočíselné věty pro aritmetické posloupnosti dostaneme

$$\#\{p \leq x | \chi(p) = c\} = \sum_{a \in R_{c,d,\chi}} \#\{p \leq x | p \equiv a \mod d\} =$$
$$= \sum_{a \in R_{c,d,\chi}} \frac{x}{\varphi(d) \log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) = \frac{x}{\varphi(d) \log x} \#R_{c,d,\chi} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\#H} \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

kde jsme využili rovnosti z lemmatu 3.1.1. □

Nyní můžeme přistoupit k vyslovení a důkazu věty pocházející od Granvilla, Dummita a Kisilevského, jenž může být nalezena v [2]. Věta nebude vyslovena ve stejném tvaru, ale v silnější verzi (s malou odlišností v závěru důkazu). Věta v této silnější verzi dává velmi dobrý explicitní odhad hustoty součinů dvou prvočísel, pro které nabývá kvadratický charakter hodnoty 1 nebo -1.

Věta 3.1.3. *Nechť je χ kvadratický charakter modulo d. Pro $\eta = -1, 1$ platí*

$$\frac{\#\{pq \leq x : \chi(p) = \chi(q) = \eta\}}{\#\{pq \leq x\}} = \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} \frac{L_\chi}{\log \log x} + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right),$$

kde $L_\chi := \sum_p \frac{\chi(p)}{p}$.

Důkaz. Uvažujme případ $\eta = 1$, důkaz pro $\eta = -1$ je téměř stejný. Pro daný kvadratický charakter χ budeme počítat počet součinů prvočísel $pq \leq x$ pro která je $\chi(p) = \chi(q) = 1$

$$S := \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ \chi(p)=1}} \sum_{\substack{p \leq q \leq x/p \\ \chi(q)=1}} 1. \tag{3.1}$$

V lemmatu 3.1.2 uvažujme případ kvadratického charakteru. Protože z lemmatu 3.1.1 máme $\#R_{1,d,\chi} = \frac{\phi(d)}{2}$, snadno dostaneme asymptotický odhad

$$\sum_{\substack{q \leq x/p \\ \chi(q)=1}} 1 = \frac{x}{2p \log \frac{x}{p}} + O\left(\frac{x}{p(\log \frac{x}{p})^2}\right), \tag{3.2}$$

který spolu s faktem, že $p \leq \sqrt{x}$ využijeme v následujících úpravách

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq q \leq x/p \\ \chi(q)=1}} 1 &= \frac{x}{2p \log \frac{x}{p}} + O\left(\frac{x}{p(\log \frac{x}{p})^2}\right) - O\left(\frac{p}{\log p}\right) = \\ &= \frac{x}{2p \log \frac{x}{p}} + O\left(\frac{x}{p(\log x)^2} + \frac{p}{\log p}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Substitucí (3.3) do (3.1) získáme

$$S = \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ \chi(p)=1}} \frac{x}{2p\log(x/p)} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ \chi(p)=1}} O\left(\frac{x}{p(\log x)^2} + \frac{p}{\log p}\right) =$$
$$= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\chi_1(p) + \chi(p)}{2} \frac{x}{2p\log(x/p)} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ \chi(p)=1}} O\left(\frac{x}{p(\log x)^2} + \frac{p}{\log p}\right),$$

kde $\frac{\chi_1(p)+\chi(p)}{2} = 0$ pro $\chi(p)) \neq 1$. Díky vztahu (1.9) můžeme opět zaměnit sumu přes prvočísla a $O\left(\frac{x}{p(\log x)^2} + \frac{p}{\log p}\right)$. Ze vztahů (2.12) a (2.13) tedy dostaneme

$$O\left(\sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ \chi(p)=1}} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{\log p}\right)\right) = O\left(\sum_{a \in R_{1,d,\chi}} \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p \equiv a \mod d}} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{\log p}\right)\right) = O\left(\log\log x\right)$$

a celkem tedy můžeme psát

$$S = \frac{1}{4} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p\log(x/p)} + \frac{x}{4} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(p)}{p\log(x/p)} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2} \log\log x\right). \tag{3.4}$$

Z lemmatu 2.2.4 snadno dostaneme odhad rozdílu mezi druhou sumou a stejnou sumou s $\log x$ místo $\log(x/p)$

$$\frac{x}{4} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(p)}{p\log(x/p)} - \frac{x}{4} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(p)}{p\log(x)} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right), \tag{3.5}$$

Můžeme tedy člen (3.4) nahradit členem $\frac{x}{4} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(p)}{p\log(x)}$. Přidání prvočísel $p > \sqrt{x}$ je to samé jako přidání nějaké funkce z $O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$, neboť použitím důsledku 2.2.3 dostaneme

$$\frac{x}{4\log x} \sum_{p > \sqrt{x}} \frac{\chi(p)}{p} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Celkem tedy máme

$$\frac{1}{4} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p\log(x/p)} + \frac{x}{\log x} \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2} \log\log x\right). \tag{3.6}$$

Z důkazu tvrzení 2.3.3 snadno plyne

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p\log(x/p)} = \#\{pq \leq x \mid p \leq q\} - O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{3.7}$$

a následnou substitucí (3.7) do (3.6) dostaneme

$$S = \#\{pq \leq x : \chi(p) = \chi(q) = 1\} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\#\{pq \leq x \mid p \leq q\} + \frac{x}{\log x}\sum_p \frac{\chi(p)}{p} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\log\log x\right)\right). \tag{3.8}$$

Z tvrzení 2.3.3 máme $\#\{pq \leq x \mid p \leq q\} = \frac{x}{\log x}(\log\log x + O(1))$. Důkaz ukončíme vydělením (3.15) výrazem $\#\{pq \leq x \mid p \leq q\}$:

$$4\frac{\#\{pq \leq x : \chi(p) = \chi(q) = 1\}}{\#\{pq \leq x \mid p \leq q\}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{\log\log x + O(1)}\sum_p \frac{\chi(p)}{p} + \frac{\frac{\log x}{x} O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\log\log x\right)}{\log\log x + O(1)} =$$
$$= 1 + \frac{1}{\log\log x}\sum_p \frac{\chi(p)}{p} + O(1) + \left[\frac{1}{\log\log x} + O(1)\right] O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{\log\log x}\sum_p \frac{\chi(p)}{p} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right).$$

□

důsledkem právě dokázané věty je fakt, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\#\{pq \leq x : \chi(p) = \chi(q) = \eta\}}{\#\{pq \leq x\}} = \frac{1}{4}.$$

Tato konvergence by ovšem šla dokázat jednodušším způsobem a věta 3.1.3 nám tedy navíc dává odhad rychlosti této konvergence. V článku [2], ze kterého tato věta pochází, je věta 3.1.3 vyslovena ve slabší formě

$$\frac{\#\{pq \leq x : \chi(p) = \chi(q) = \eta\}}{\#\{pq \leq x\}} = \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4}\frac{L_\chi + o(1)}{\log\log x}.$$

Ve slabší variantě ovšem nemůžeme považovat $\frac{L_\chi}{\log\log x}$ za dobrý explicitní odhad, neboť nevíme nic bližšího o funkci z $o(1)$. V silnější verzi je ovšem velikost neurčené chyby nějaká funkce z $O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)$ a je snadno vidět, že funkce $\frac{\log\log x}{\log x}$ klesá k nule rychleji, než $\frac{1}{\log\log x}$. Máme tedy dobrý odhad hustoty pro velmi vysoká x, pro které je skutečnou hodnotu podílu z věty 3.1.3 velmi obtížné spočítat.

3.2 Součiny dvou prvočísel a obecné Dirichletovy charaktery

Větu 3.1.3 lze zobecnit pro obecný Dirichletův charakter χ a její zobecnění je hlavním přínosem této práce. Myšlenka důkazu obecnější verze věty je sice stejná jako u věty 3.1.3, nicméně mnohé kroky jsou technicky náročnější a je nutné se zaobírat více problémy. Hlavní komplikací je nutnost pracovat s polynomem $g(x)$ dle definice (3.12). Zajímavá je spojitost polynomu g s cyklotomickými polynomy z obecné algebry. Jak dále uvidíme, v důkazu věty 3.2.1 vznikla potřeba zadefinovat zcela novou aritmetickou funkci $\chi^{(c)}$ pro některá $c \in \mathbb{C}$. Tato funkce je nutná k explicitnímu vyjádření odhadu hustoty součinů dvou prvočísel, které nabývají pro libovolný pevný Dirichletův charakter dané hodnoty.

Věta 3.2.1. *Nechť je χ libovolný Dirichletův charakter modulo d. Označme jeho obor hodnot jako $H = \{\chi(a) | a \in \{1, \dots, d-1\}, (a, d) = 1\}$ a $n = \#H$. Zvolme $c \in H$, pak platí*

$$\frac{\#\{pq \leq x \mid \chi(p) = c, \chi(q) = c, p \leq q\}}{\#\{pq \leq x \mid p \leq q\}} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 \log\log x} \sum_p \frac{\chi^{(c)}(p)}{p} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right),$$

kde $\chi^{(c)}$ je stejně jako Dirichletův charakter definováno pro všechna přirozená čísla pomocí hodnot $a \in \{1, \dots, d-1\}$ následovně:

$$\chi^{(c)}(a) = \begin{cases} 0 & \textit{pokud } \chi(a) = 0, \\ n-1 & \textit{pokud } \chi(a) = c, \\ -1 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Nechť jsou dány konstanty $e, f \in H$, $e \neq f$, pak platí

$$\frac{\#\{pq \leq x \mid \chi(p) = e, \chi(q) = f\}}{\#\{pq \leq x \mid p \leq q\}} = \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2 \log\log x} \sum_p \frac{\chi^{(e)}(p) + \chi^{(f)}(p)}{p} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right),$$

kde $\chi^{(e)}$ a $\chi^{(f)}$ jsou definovány stejným způsobem jako $\chi^{(c)}$

Důkaz. Nejdříve dokážeme první část tvrzení. Rozepíšeme si čitatel jako

$$S := \#\{pq \leq x \mid \chi(p) = c, \chi(q) = c, p \leq q\} = \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ \chi(p) = c}} \sum_{\substack{p \leq q \leq x/p \\ \chi(q) = c}} 1. \tag{3.9}$$

Z lemmatu 3.1.2 snadno dostaneme asymptotický odhad

$$\sum_{\substack{q \leq x/p \\ \chi(q) = c}} 1 = \frac{1}{n} \frac{x}{p \log \frac{x}{p}} + O\left(\frac{x}{p (\log \frac{x}{p})^2}\right), \tag{3.10}$$

který využijeme v následujících úpravách

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\le q\le x/p\\ \chi(q)=c}} 1 &= \frac{1}{n}\frac{x}{p\log\frac{x}{p}} + O\left(\frac{x}{p(\log\frac{x}{p})^2}\right) + O\left(\frac{p}{\log p}\right) = \\ &= \frac{1}{n}\frac{x}{p\log\frac{x}{p}} + O\left(\frac{x}{p(\log x)^2} + \frac{p}{\log p}\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Substitucí (3.11) do (3.9) získáme

$$\begin{aligned}S &= \sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ \chi(p)=c}} \frac{1}{n}\frac{x}{p\log(x/p)} + \sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ \chi(p)=c}} O\left(\frac{x}{p(\log x)^2} + \frac{p}{\log p}\right) = \\ &= \sum_{p\le\sqrt{x}} g(\chi(p))\frac{1}{n}\frac{x}{p\log(x/p)} + \sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ \chi(p)=c}} O\left(\frac{x}{p(\log x)^2} + \frac{p}{\log p}\right),\end{aligned}$$

kde $g \in \mathbb{C}[x]$ splňuje $g(\chi(p)) = 0$ pro $\chi(p)) \neq c$ a $g(\chi(p)) = 1$ pro $\chi(p)) = c$. Polynom g definujeme jako

$$g(x) = \prod_{\substack{h\in H\\ h\neq c}} \frac{(x-h)}{(c-h)} = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{3.12}$$

Polynomů splňujících požadované vlastnosti existuje samozřejmě více, proč jsme zvolili zrovna (3.12) uvidíme v dalším. Budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 3.2.2. *Polynom g definovaný vztahem (3.12) je tvaru*

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{nc^i}x^i.$$

Důkaz. Upravíme nejdříve výraz ve jmenovateli

$$\prod_{\substack{h\in H\\ h\neq c}}(c-h) = c^{n-1}\prod_{\substack{h\in H\\ h\neq c}}(1-c^{-1}h) = c^{n-1}\prod_{\substack{h\in H\\ h\neq c}}(1-c^{-1}h) = c^{n-1}\prod_{\substack{h'\in H\\ h'\neq 1}}(1-h'),$$

kde poslední rovnost dostaneme substitucí $h' = c^{-1}h$. Protože podle tvrzení 1.3.4 pro množinu H platí

$$H = \left\{\exp\left(\frac{2\pi ji}{n}\right) \mid j \in \{1,\ldots,n\}\right\},$$

můžeme psát

$$\prod_{\substack{h'\in H\\ h'\neq 1}}(x-h') = \frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + \ldots + 1.$$

Tedy $\prod_{\substack{h\in H\\ h\neq c}}(c-h)=c^{n-1}n$. Nakonec získáme

$$g(x)=\frac{1}{nc^{n-1}}\prod_{\substack{h\in H\\ h\neq c}}(x-h)=\frac{1}{n}\prod_{\substack{h'\in H\\ h'\neq 1}}\left(\frac{x}{c}-h'\right)=\frac{1}{n}\frac{(\frac{x}{c})^n-1}{\frac{x}{c}-1}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{nc^i}x^i.$$

□

Díky lemma 3.2.2 známe přesně tvar polynomu g. Proč jsme nevzali jiný polynom vyššího stupně s požadovanými vlastnostmi se objasní v dalším. Označíme-li $h(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{nc^i}x^i$, můžeme psát

$$S=\frac{1}{n^2}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{x}{p\log(x/p)}+x\frac{1}{n}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{h(\chi(p))}{p\log(x/p)}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ \chi(p)=c}}O\left(\frac{x}{p(\log x)^2}+\frac{p}{\log p}\right).$$

Ze vztahů (2.12) a (2.13) dostaneme

$$O\left(\sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ \chi(p)=c}}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{\log p}\right)\right)=O\left(\sum_{a\in R_{c,d,\chi}}\sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ p\equiv a \mod d}}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{\log p}\right)\right)=O\left(\log\log x\right)$$

a můžeme tedy psát

$$S=\frac{1}{n^2}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{x}{p\log(x/p)}+x\frac{1}{n}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{h(\chi(p))}{p\log(x/p)}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\log\log x\right). \qquad (3.13)$$

Chceme získat odhad rozdílu mezi druhou sumou a stejnou sumou s $\log x$ místo $\log(x/p)$. Protože členy v $h(\chi(p))$ mají vlastnost dokázanou v lemma 2.2.4 a jejich počet závisí na pevně daném charakteru χ a modulu d, můžeme psát

$$\left|x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{h(\chi(p))}{p\log(x/p)}-x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{h(\chi(p))}{p\log(x)}\right|=O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Můžeme tedy člen (3.4) nahradit členem $\frac{1}{n}x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{h(\chi(p))}{p\log(x)}$. Přidání prvočísel $p>\sqrt{x}$ je to samé jako přidání nějaké funkce z $O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$. Toto dokážeme. Protože členy v $h(\chi(p))$ jsou podle lemma 1.3.5 netriviální charaktery, můžeme na ně člen po členu aplikovat důsledek 2.2.3. Jejich počet závisí pouze na zvoleném charakteru a modulu d, proto můžeme psát

$$\frac{x}{\log x}\sum_{p>\sqrt{x}}\frac{h(\chi(p))}{p}=O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Celkem tedy máme

$$S=\frac{1}{n^2}\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{x}{p\log(x/p)}+\frac{x}{\log x}\frac{1}{n}\sum_{p}\frac{h(\chi(p))}{p}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\log\log x\right) \tag{3.14}$$

Ze vztahu (3.14) stejně jako v důkazu věty 3.1.3 dostaneme

$$S=\frac{1}{n^2}\#\{pq\leq x \mid p\leq q\}+\frac{x}{\log x}\frac{1}{n}\sum_{p}\frac{h(\chi(p))}{p}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\log\log x\right). \tag{3.15}$$

Z tvrzení 2.3.3 máme $\#\{pq\leq x \mid p\leq q\}=\frac{x}{\log x}(\log\log x+O(1))$. Důkaz ukončíme vydělením (3.15) výrazem $\#\{pq\leq x \mid p\leq q\}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\#\{pq\leq x \mid \chi(p)=\chi(q)=c, p\leq q\}}{\#\{pq\leq x \mid p\leq q\}}=\\
&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\log\log x+O(1)}\frac{1}{n}\sum_{p}\frac{h(\chi(p))}{p}+\frac{\frac{\log x}{x}O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\log\log x\right)}{\log\log x+O(1)}=\\
&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\log\log x}\frac{1}{n}\sum_{p}\frac{h(\chi(p))}{p}+O(1)+\left[\frac{1}{\log\log x}+O(1)\right]O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)=\\
&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\log\log x}\frac{1}{n}\sum_{p}\frac{h(\chi(p))}{p}+O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right).
\end{aligned}$$

Nakonec pomocí vztahu pro částečný součet geometrické řady zjednodušíme výraz $h(\chi(p))$. Pro $\frac{\chi(p)}{c}\neq 1$ platí

$$h(\chi(p))=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\chi(p)}{c}\right)^j=\frac{\frac{\chi(p)}{c}-\left(\frac{\chi(p)}{c}\right)^n}{1-\frac{\chi(p)}{c}}=\frac{\frac{\chi(p)}{c}-1}{1-\frac{\chi(p)}{c}}=-1,$$

protože $\frac{\chi(p)}{c}=\exp\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)$ pro nějaké $k\in\{1,\dots,n-1\}$. V případě $\frac{\chi(p)}{c}=1$ je zřejmě

$$h(\chi(p))=\sum_{j=1}^{n-1}1=n-1$$

a důkaz první části tvrzení je u konce. Druhou část tvrzení dokážeme pomocí rozepsání

$$S'=\#\{pq\leq x \mid \chi(p)=e,\chi(q)=f\}=\sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ \chi(p)=e}}\sum_{\substack{p\leq q\leq x/p\\ \chi(q)=f}}1+\sum_{\substack{q\leq\sqrt{x}\\ \chi(q)=f}}\sum_{\substack{q\leq p\leq x/q\\ \chi(p)=e}}1.$$

Na obě sumy aplikujeme stejný postup jako v důkazu první části a dostaneme

$$\begin{aligned}S' &= \frac{1}{n^2}\#\{pq \le x \mid p \le q\} + \frac{1}{n^2}\#\{pq \le x \mid q \le p\} + \\ &+ \frac{x}{\log x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_p \frac{1}{e^i}\frac{\chi(p)^i}{p} + \frac{x}{\log x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_p \frac{1}{f^i}\frac{\chi(p)^i}{p} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\log\log x\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Tvrzení věty získáme z (3.16) stejně jako v důkazu první části. □

Nyní uvedeme k právě dokázané větě několik komentářů. Nejprve je nutné poznamenat, že konvergence řady

$$\sum_p \frac{\chi^{(c)}(p)}{p} = \sum_p \frac{h(\chi(p))}{p}$$

plyne z konvergence řady

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p},$$

kterou jsme dokázali ve větě 2.2.2. Bez této skutečnosti by právě dokázaná věta neměla smysl.

Budeme-li ve větě 3.2.1 uvažovat kvadratický charakter, znění věty bude odpovídat větě 3.1.3. Pro kvadratické charaktery je totiž při použitém značení $n = 2$ a $\chi^{(1)}$ odpovídá kvadratickému charakteru.

Dalším zajímavým případem zobecněné věty jsou Dirichletovy charaktery modulo d, které pro všechna čísla nesoudělná s d a menší než d nabývají navzájem různých hodnot. Tyto charaktery vybírají prvočísla ležících v určitých aritmetických posloupnostech a v těchto případech je zřejmě $n = \varphi(d)$. Výpočtům pro tyto případy se budeme věnovat v následující závěrečné kapitole.

3.3 Součiny tří prvočísel a kvadratické charaktery

V důkazu článku [2] autoři píší, že lze dokázat i zobecnění výsledku z věty 3.1.3 pro k prvočísel

$$\frac{\#\{p_1 \dots p_k \le x \mid \chi(p_j) = 1, j = 1, \dots, k\}}{\#\{p_1 \dots p_k \le x\}} = \frac{1}{2^k} + \frac{(k-1)L_\chi + o(1)}{2^k \log\log x}. \tag{3.17}$$

Důkaz je oproti případu dvou prvočísel technicky značně obtížnější a uvedeme jeho náznak pro $k = 3$, ve kterém přesně nedokážeme všechny odhady. Nejdříve však dokážeme potřebné lemma.

Lemma 3.3.1. *Pro netriviální Diricheltův charakter* χ *platí*

$$\left|\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)}{pq}\frac{1}{\log\frac{x}{pq}}-\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)}{pq}\frac{1}{\log x}\right|=O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Důkaz. Přepočítáním rozdílu na společného jmenovatele můžeme dokazovat ekvivalentní tvrzení

$$\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)\log(pq))}{pq\log\frac{x}{pq}}=O(1).$$

Pomocí věty 2.2.2 při označení a jako charakteristické funkce množiny prvočísel máme

$$A(t)=\sum_{n\leq t}\frac{a(n)\chi(n)\log(pn))}{pn}=\frac{1}{p}\left[\log p\sum_{n\leq t}\frac{a(n)\chi(n)}{n}+\sum_{n\leq t}\frac{a(n)\chi(n)\log n}{n}\right]=O\left(\frac{\log p}{p}\right).$$

Označíme-li

$$f(t)=\frac{1}{\log\frac{x}{pt}},$$

dostaneme z věty 1.1.5

$$\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)\log(pq))}{pq\log\frac{x}{pq}}=A\left(\sqrt{\frac{x}{p}}\right)f\left(\sqrt{\frac{x}{p}}\right)-A(p)f(p)+\int_p^{\sqrt{\frac{x}{p}}}A(t)f'(t)\mathrm{d}t=$$

$$=O\left(\frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{\log\sqrt{\frac{x}{p}}}-O\left(\frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{\log\frac{x}{p^2}}+\int_p^{\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{A(t)}{t\left(\log\frac{x}{pt}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

S využitím nerovnosti $p\leq\sqrt[3]{x}$ můžeme a odhadnout integrál jako

$$\left|\int_p^{\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{A(t)}{t\left(\log\frac{x}{pt}\right)^2}\mathrm{d}t\right|=O\left(\frac{\log p}{p\log x}\right)\int_p^{\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{1}{t}=O\left(\frac{\log p}{p\log x}\right)$$

a opět s využitím $p\leq\sqrt[3]{x}$ celkem dostaneme

$$\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)\log(pq))}{pq\log\frac{x}{pq}}=O\left(\frac{\log p}{p\log x}\right).$$

Důkaz ukončíme použitím věty 2.1.5

$$\sum_{p\le\sqrt[3]{x}}\sum_{p\le q\le\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)\log(pq))}{pq\log\frac{x}{pq}}=\sum_{p\le\sqrt[3]{x}}O\left(\frac{\log p}{p\log x}\right)=O(1),$$

přičemž jsme opět využili záměnu sumy přes prvočísla a $O\left(\frac{\log p}{p\log x}\right)$ ospravedlněnou vztahem (1.9). □

Nechť je χ kvadratický charakter modulo d. Pak při značení

$$r(x):=\frac{\#\{pqr\le x\mid\chi(p)=1,\chi(q)=1,\chi(r)=1,p\le q\le r\}}{\#\{pqr\le x\mid p\le q\le r\}}$$

platí

$$r(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{L_\chi}{\log\log x}+o\left(\frac{1}{\log\log x}\right),$$

Náznak důkazu: Zavedeme značení pro čitatel a vyjádříme jej jako tři vnořené sumy

$$S:=\#\{pqr\le x\mid\chi(p)=1,\chi(q)=1,\chi(r)=1,p\le q\le r\}=\sum_{\substack{p\le\sqrt[3]{x}\\ \chi(p)=1}}\sum_{\substack{p\le q\le\sqrt{\frac{x}{p}}\\ \chi(q)=1}}\sum_{\substack{q\le r\le\frac{x}{pq}\\ \chi(r)=1}}1.$$

Stejným způsobem jako ve větě 3.1.3 dostaneme

$$S=\sum_{\substack{p\le\sqrt[3]{x}\\ \chi(p)=1}}\sum_{\substack{p\le q\le\sqrt{\frac{x}{p}}\\ \chi(q)=1}}\frac{1}{2}\frac{x}{pq\log\frac{x}{pq}}+\sum_{\substack{p\le\sqrt[3]{x}\\ \chi(p)=1}}\sum_{\substack{p\le q\le\sqrt{\frac{x}{p}}\\ \chi(q)=1}}O\left(\frac{x}{pq(\log x)^2}+\frac{q}{\log q}\right).\tag{3.18}$$

Nejdříve zkoumejme první člen v (3.18), který označíme jako S_1 a upravíme

$$\begin{aligned}8S_1&=8\sum_{p\le\sqrt[3]{x}}\frac{1+\chi(p)}{2}\sum_{p\le q\le\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{1+\chi(q)}{2}\frac{1}{2}\frac{x}{pq\log\frac{x}{pq}}=\\&=\sum_{p\le\sqrt[3]{x}}\sum_{p\le q\le\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{x}{pq\log\frac{x}{pq}}+\sum_{p\le\sqrt[3]{x}}\sum_{p\le q\le\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(p)+\chi(q)+\chi(p)\chi(q)}{pq}\frac{x}{\log\frac{x}{pq}}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Nejprve odhadneme 2. člen v (3.19). V lemmatu 3.3.1 jsme ukázali, že můžeme ve jmenovateli v (3.19) pro člen s $\chi(q)$ nahradit $\log\frac{x}{pq}$ funkcí $\log x$ s chybou z $O\left(\frac{x}{\log x}\right)$. Pro členy s $\chi(p)$ a $\chi(p)\chi(q)$ by měl být důkaz podobný.

Po aplikaci zmíněných nahrazení se nyní pokusíme v získaných členech vytvořit řadu L_χ a odhadnout vzniklou chybu. Protože z důsledku 2.2.3 máme

$$\sum_{q>\sqrt{\frac{x}{p}}} \frac{\chi(q)}{q} = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

můžeme psát

$$\frac{x}{\log x}\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)}{pq} = \frac{x}{\log x}\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\frac{1}{p}\left[\sum_{q}\frac{\chi(q)}{q} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right] =$$

$$= \frac{x\log\log x}{\log x}\sum_{q}\frac{\chi(q)}{q} + O\left(\frac{x\log\log x}{(\log x)^2}\right).$$

Stejný odhad by měl jít provést i pro člen s $\chi(p)$ a podobným způsobem můžeme ukázat, že

$$\frac{x}{\log x}\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\frac{\chi(p)}{p}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{\chi(q)}{q} = \frac{x}{\log x}L_\chi^2 + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Celkem jsme tedy ukázali, že druhý člen v 3.19 je roven

$$2L_\chi\frac{x\log\log x}{\log x} + O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log x}\right).$$

Nyní se pustíme do úprav prvního členu v (3.19). Poznamenejme, že záměnu dvojité sumy s $O\left(f\left(\frac{x}{pq}\right)\right)$ půjde pro reálnou funkci f jistě dokázat podobným způsobem jako v případě jednoduché sumy v (1.9). S pomocí prvočíselné věty snadno dostaneme

$$\frac{x}{pq\log\frac{x}{pq}} = \pi\left(\frac{x}{pq}\right) - O\left(\frac{x}{pq\left(\log\frac{x}{pq}\right)^2}\right) - \pi(q) + \pi(q) =$$

$$= \sum_{q\leq r\leq\frac{x}{p}} 1 + \pi(q) + O\left(\frac{x}{pq\left(\log\frac{x}{pq}\right)^2}\right)$$

a můžeme první člen na pravé straně rovnosti (3.19) rozepsat jako

$$\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\frac{x}{pq\log\frac{x}{pq}} = \#\{pqr\leq x \mid p\leq q\leq r\} + \sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}} O\left(\frac{x}{pq\left(\log\frac{x}{pq}\right)^2}\right) +$$

$$+ \sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\pi(q). \tag{3.20}$$

Teď postupně odhadneme členy ve vztahu (3.20). Jistě lze dokázat platnost odhadu

$$\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}\pi(q)=O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Podobným způsobem jako v důkazu lemmatu 3.3.1 dostaneme

$$\sum_{p\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}}O\left(\frac{x}{pq\left(\log\frac{x}{pq}\right)^2}\right)=O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2}\right).$$

Celkem jsme tedy ukázali, že první člen v 3.19 je roven

$$\#\{pqr\leq x\mid p\leq q\leq r\}+O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Nakonec vyšetříme druhý člen v (3.18), který označíme jako S_2. Máme

$$S_2=O\left(\sum_{a\in R_{1,d,\chi}}\sum_{\substack{p\leq\sqrt[3]{x}\\ p\equiv a \mod d}}\sum_{b\in R_{1,d,\chi}}\sum_{\substack{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}\\ q\equiv b \mod d}}\left[\frac{x}{pq(\log x)^2}+\frac{q}{\log q}\right]\right).$$

Pro pevné a a b můžeme psát odhady

$$\left|\sum_{\substack{p\leq\sqrt[3]{x}\\ p\equiv a \mod d}}\sum_{\substack{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}\\ q\equiv b \mod d}}\frac{1}{pq}\right|\leq\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \mod d}}\sum_{\substack{q\leq x\\ q\equiv b \mod d}}\frac{1}{pq}=$$
$$=\left[\frac{1}{\varphi(d)}\log\log x+O(\log\log x)\right]\sum_{\substack{p\leq\sqrt[3]{x}\\ p\equiv a \mod d}}\frac{1}{p}=O((\log\log x)^2)$$

a

$$\sum_{\substack{p\leq\sqrt[3]{x}\\ p\equiv a \mod d}}\sum_{\substack{p\leq q\leq\sqrt{\frac{x}{p}}\\ q\equiv b \mod d}}\frac{q}{\log q}=O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right).$$

Celkem tedy máme

$$S_2=O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

S využitím věty 2.4.4 máme

$$\#\{pqr \leq x \mid p \leq q \leq r\} = \frac{x(\log\log x)^2}{2\log x}[1+o(1)]. \tag{3.21}$$

Celkově jsme pro člen S dostali vztah

$$S = \frac{1}{8}\#\{pqr \leq x \mid p \leq q \leq r\}\frac{2}{8}\cdot\frac{x\log\log x}{\log x}\cdot L_\chi + O\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{3.22}$$

Vydělením (3.21) vztahem (3.22) získáme

$$\frac{S}{\#\{pqr \leq x \mid p \leq q \leq r\}} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8}\cdot\frac{x\log\log x}{\log x}\cdot\sum_q \frac{\chi(q)}{q}\cdot\frac{1}{\frac{x(\log\log x)^2}{2\log x}[1+o(1)]}+$$
$$+\frac{1}{\frac{x(\log\log x)^2}{2\log x}[1+o(1)]}O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

a protože platí $\frac{1}{1+o(1)} = 1+o(1)$, konečně je

$$\frac{S}{\#\{pqr \leq x \mid p \leq q \leq r\}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{L_\chi}{\log\log x} + o\left(\frac{1}{\log\log x}\right).$$

Kapitola 4

Výpočty

Provedeme výpočty členu

$$\sum_p \frac{\chi^{(c)}(p)}{p} \tag{4.1}$$

pro několik speciálních případů věty 3.2.1. Předpokládejme, že grupa $G = (\mathbb{Z}/d)^\times$ je cyklická. Je známo, že tato grupa G je cyklická, právě když d je 1, 2, 4, p^k nebo $2p^k$, kde p je liché prvočíslo a $k \geq 1$. Označíme-li generátor grupy $(\mathbb{Z}/d)^\times$ jako a, můžeme zavést přirozené značení $\chi_{d,k+1}$ pro explicitní charakter jako

$$\chi_{d,k+1}(a^j) = \exp\left(\frac{2\pi ikj}{\varphi(d)}\right),$$

pro $k = 0, \ldots, \varphi(d) - 1$ a $j \in \mathbb{Z}$. S využitím definovaného značení pro Dirichletův charakter přeznačíme funkci $\chi^{(c)}$ z věty 3.2.1 na $\chi^{(c)}_{d,k+1}$. Nejdříve si ukážeme metodiku výpočtu a pak znázorníme výsledky v přehledné tabulce. Při značení $\omega = \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)$ obsahuje tabulka 4.1 všechny Dirichletovy charaktery modulo 7:

Tabulka 4.1: Dirichletovy charaktery modulo 7

n	1	2	3	4	5	6
$\chi_{7,1}(n)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{7,2}(n)$	1	ω^2	ω	$-\omega$	$-\omega^2$	-1
$\chi_{7,3}(n)$	1	$-\omega$	ω^2	ω^2	$-\omega$	1
$\chi_{7,4}(n)$	1	1	-1	1	-1	-1
$\chi_{7,5}(n)$	1	ω^2	$-\omega$	$-\omega$	ω^2	1
$\chi_{7,6}(n)$	1	$-\omega$	$-\omega^2$	ω^2	ω	-1

Zkoumejme člen (4.1) pro charakter $\chi_{7,2}$ a $c = \omega$. Pro tento charakter je při značení z věty 3.2.1 zřejmě $n = 6$. Funkce $\chi^{(\omega)}_{7,2}$ je pro všechna prvočísla definována následujícím předpisem:

$$\chi_{7,2}^{(\omega)}(p) = -1 \text{ pro } p \equiv 1,2,4,5,6 \mod 7$$

a

$$\chi_{7,2}^{(\omega)}(p) = 5 \text{ pro } p \equiv 3 \mod 7.$$

Označíme-li k-té prvočíslo jako p_k, můžeme zapsat výsledek přibližného výpočtu jako

$$\sum_{k=1}^{10^7} \frac{\chi_{7,2}^{(\omega)}(p_k)}{p_k} \approx 1,087.$$

Pro daný Dirichletův charakter $\chi_{d,i}$ zavedeme značení

$$S(\chi_{d,i}, c, m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\chi_{d,i}^{(c)}(p_k)}{p_k}$$

a

$$r_{d,i}^{(c)}(x) = \frac{n^2 \#\{pq \le x : \chi_{d,i}(p) = \chi_{d,i}(q) = c\}}{\#\{pq \le x\}}.$$

Při tomto novém značení, které je vhodné pro zápis výpočetních výsledků, lze zformulovat větu 3.2.1 ve tvaru

$$r_{d,i}^{(c)}(x) = 1 + \frac{\lim_{m\to+\infty} S(\chi_{d,i}, c, m)}{\log\log x} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right).$$

V tabulce 4.2 jsou výsledky výpočtu $S(\chi_{7,2}, c, 10^7)$ pro všechny hodnoty c. Výpočty jsme zkoušeli udělat i pro větší hodnoty m než je 10^7 a výsledky se na prvních 3 desetinných místech nelišily. Vycházíme tedy z toho, že se přibližný výpočet od skutečné limity na prvních 3 místech příliš neliší.

Tabulka 4.2: Výpočty $S(\chi_{7,2}, c, 10^7)$

c	1	ω^2	ω	$-\omega$	$-\omega^2$	-1
$S(\chi_{7,2}, c, 10^7)$	$-1,241$	$1,837$	$1,087$	$-0,896$	$0,158$	$-0,946$

Stejné výpočty ještě provedeme pro charakter $\chi_{7,3}$. Například pro $c = -\omega$ je $\chi_{7,3}^{(-\omega)}(p) = 2$ pro $p \equiv 2,5 \mod 7$ a $\chi_{7,3}^{(-\omega)}(p) = -1$ pro $p \equiv 1,3,4,6$. Výsledky pro všechny možnosti hodnot parametru c shrnuje tabulka 4.3.

Tabulka 4.3: Výpočty $S(\chi_{7,3}, c, 10^7)$

c	$-\omega$	1	ω^2
$S(\chi_{7,3}, c, 10^7)$	$0,998$	$-1,093$	$0,095$

Z tabulky 4.1 vidíme, že platí

$$r_{7,2}^{(1)}(x) = \frac{36\#\{pq \le x : p \equiv q \equiv 1 \mod 7\}}{\#\{pq \le x\}}.$$

Stejně lze z tabulky 4.1 snadno odvodit příslušející aritmetické posloupnosti k podílům $r_{7,2}^{(\omega^2)}(x), r_{7,2}^{(\omega^2)}(x), r_{7,2}^{(\omega)}(x), r_{7,2}^{(-\omega)}(x), r_{7,2}^{(-\omega^2)}(x), r_{7,2}^{(-1)}(x)$. Na obrázcích 4.1 – 4.6 je vykresleno srovnání průběhu skutečné hodnoty podílu $r_{7,2}^{(c)}$ a konečné aproximace jeho explicitního odhadu

$$1 + \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi_{d,i}^{(c)}(p_k)}{p_k}}{\log\log x}. \tag{4.2}$$

Rozdíl obou grafů dává blíže neurčený chybový člen $O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)$, který se nám podařil odhadnout díky asymptotickým odhadům v kapitolách 1 a 2. Tabulka 4.4 shrnuje výpočty nejvyšších dosažených odchylek odhadu (4.2) od skutečné hodnoty podílu pro $x \in [10^7, 10^8]$ vyjádřené v procentech.

Tabulka 4.4: Procentuální chyby odhadů od skutečných hodnot

$r_{7,2}^{(1)}$	$r_{7,2}^{(\omega^2)}$	$r_{7,2}^{(\omega)}$	$r_{7,2}^{(-\omega)}$	$r_{7,2}^{(-\omega^2)}$	$r_{7,2}^{(-1)}$
$6,55\%$	$14,21\%$	$18,96\%$	$9,21\%$	$17,82\%$	$9,45\%$

Vidíme, že přesnost aproximace skutečné hodnoty podílu explicitním odhadem není nejlepší. Je to dáno tím, že neurčený člen je řádu $O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)$ a ten je pro hodnoty x v řádech 10^8 poměrně vysoký. Pro velmi vysoká x je skutečná hodnota podílu těžko spočítatelná. Pro ilustraci však můžeme využitím věty 3.2.1 učinit odhad pro $x^* = \exp(\exp(10))$ pro případ $r_{7,2}^{(w_1^2)}$, ve kterém je pro napočítané hodnoty x hodnota $r_{7,2}^{(\omega_1^2)}$ velmi vzdálená od 1 a explicitní odhad špatný. Máme

$$r_{7,2}^{(\omega^2)}(x^*) = 1 + \frac{1}{10}\sum_p \frac{\chi_{7,2}^{(\omega^2)}(p)}{p} + e,$$

přičemž existuje konstanta $K > 0$ tak, že chybový člen e splňuje nerovnost

$$|e| \le K\frac{10}{\exp(10)}.$$

Lze předpokládat, že konstanta K je v řádu desítek a chyba e je tedy zanedbatelná. Pro takto vysoké x^* je tedy explicitní odhad hustoty velmi přesný a skutečná hodnota $r_{7,2}^{(\omega^2)}(x^*)$ je již blízko $1 + \frac{1}{10}\sum_p \frac{\chi_{7,2}^{(\omega^2)}(p)}{p}$.

Protože výsledky výpočtů pro charakter $\chi_{7,2}$ se jeví jako zajímavé, provedeme několik obdobných výpočtů pro vybraný charakter modulo 11. Uvažujme charakter $\chi_{11,2}$ daný tabulkou 4.5 při značení $\tau = \exp\left(\frac{2\pi i}{\varphi(11)}\right) = \exp\left(\frac{\pi i}{5}\right)$.

Tabulka 4.5: Charakter $\chi_{11,2}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\chi_{11,2}(n)$	1	τ	$-\tau^3$	τ^2	τ^4	$-\tau^4$	$-\tau^2$	τ^3	$-\tau$	-1

Tento charakter vybírá všechny aritmetické posloupnosti modulo 11. V tabulkách 4.6 a 4.7 se nacházejí přibližné výpočty konstant pro explicitní odhad.

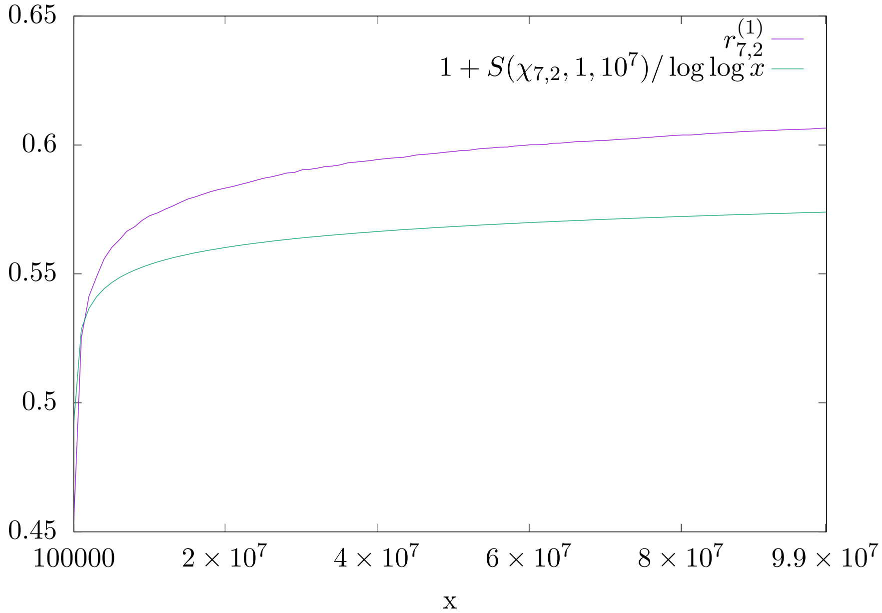
Tabulka 4.6: Výpočty $S(\chi_{11,2}, c, 10^7)$

c	1	τ	$-\tau^3$	τ^2	τ^4
$S(\chi_{11,2}, c, 10^7)$	$-1,141$	$4,244$	$1,877$	$-1,290$	$0,409$

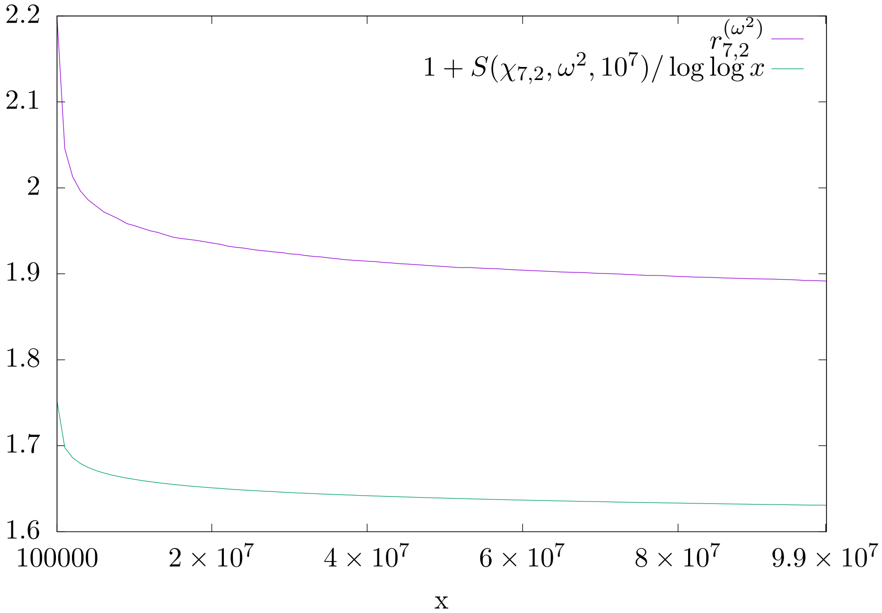
Tabulka 4.7: Výpočty $S(\chi_{11,2}, c, 10^7)$

c	$-\tau^4$	$-\tau^2$	τ^3	$-\tau$	-1
$S(\chi_{11,2}, c, 10^7)$	$-0,831$	$0,176$	$-0,880$	$-1,186$	$-1,386$

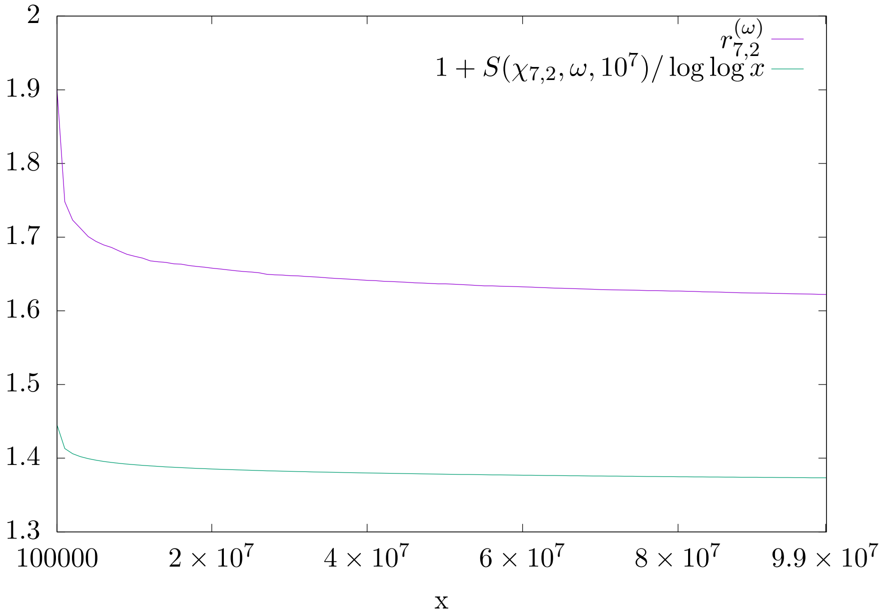
Zajímavé je, že pro případ $c = \tau$ vychází přibližný výpočet řady poměrně vysoký. Poznamenejme, že pro velmi vysoká x již velikost konstant v odhadu nehraje příliš vysokou roli. S pomocí těchto výpočtů jsme vypočítali hodnoty $r_{11,2}^{(1)}$, $r_{11,2}^{(\tau)}$, $r_{11,2}^{(-\tau^2)}$, $r_{11,2}^{(-\tau)}$, jejich explicitní odhady a vykreslili je do obrázků 4.7, 4.8, 4.9 a 4.10. Opět vidíme, že pro ty hodnoty x, pro které je hodnota hustoty spočítatelná, vychází její explicitní odhad nepřesně.



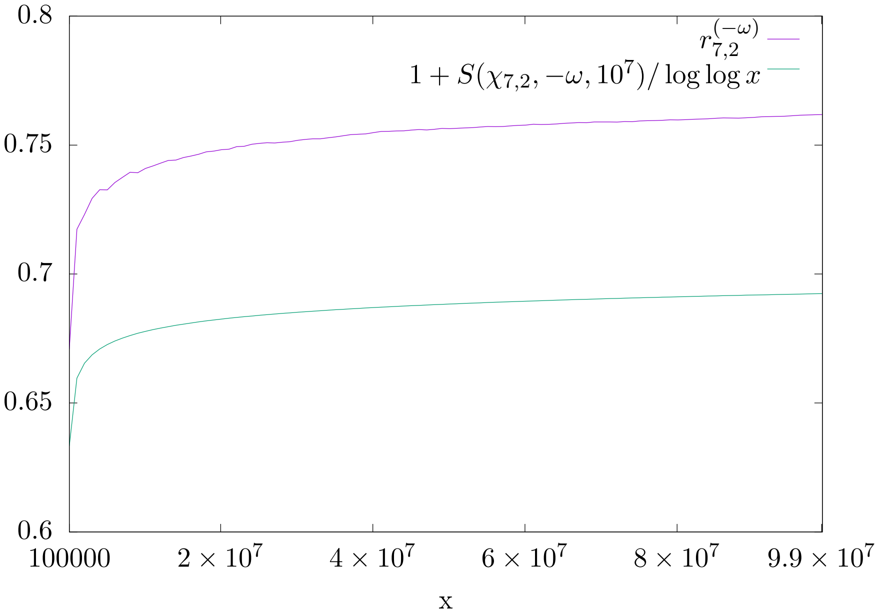
Obrázek 4.1: Srovnání průběhu $r^{(1)}_{7,2}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{7,2},1,10^7)}{\log\log x}$.



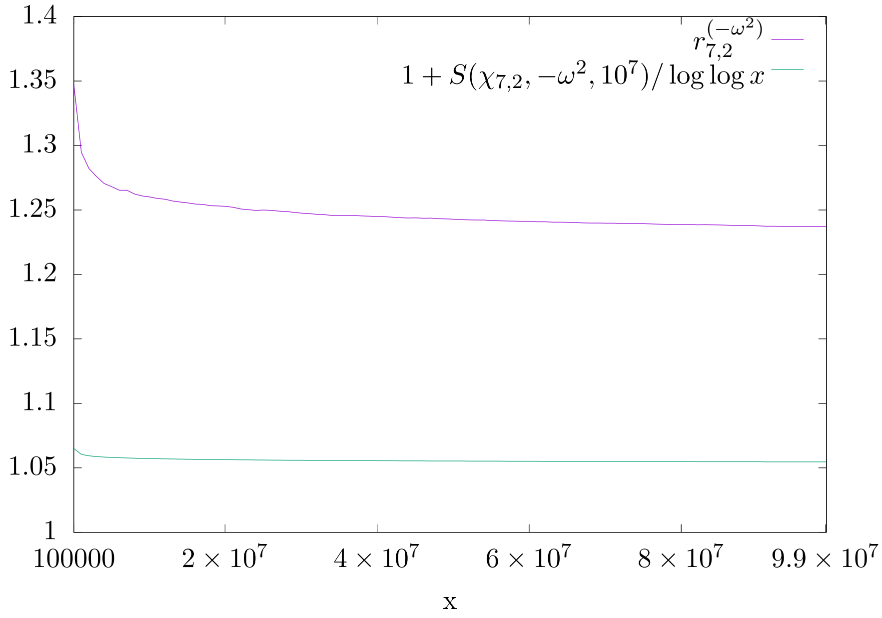
Obrázek 4.2: Srovnání průběhu $r^{(\omega^2)}_{7,2}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{7,2},\omega^2,10^7)}{\log\log x}$.



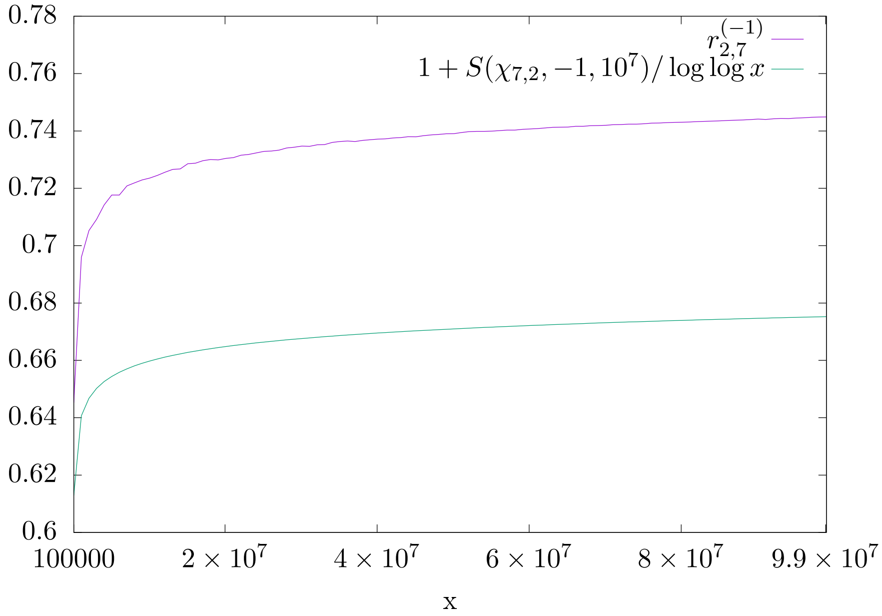
Obrázek 4.3: Srovnání průběhu $r_{7,2}^{(\omega)}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{7,2},\omega,10^7)}{\log\log x}$.



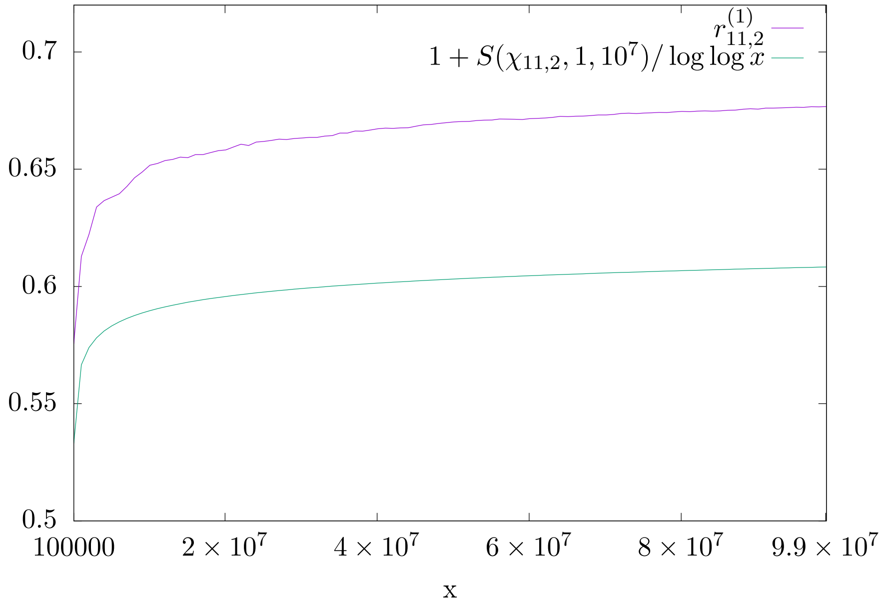
Obrázek 4.4: Srovnání průběhu $r_{7,2}^{(-\omega)}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{7,2},-\omega,10^7)}{\log\log x}$.



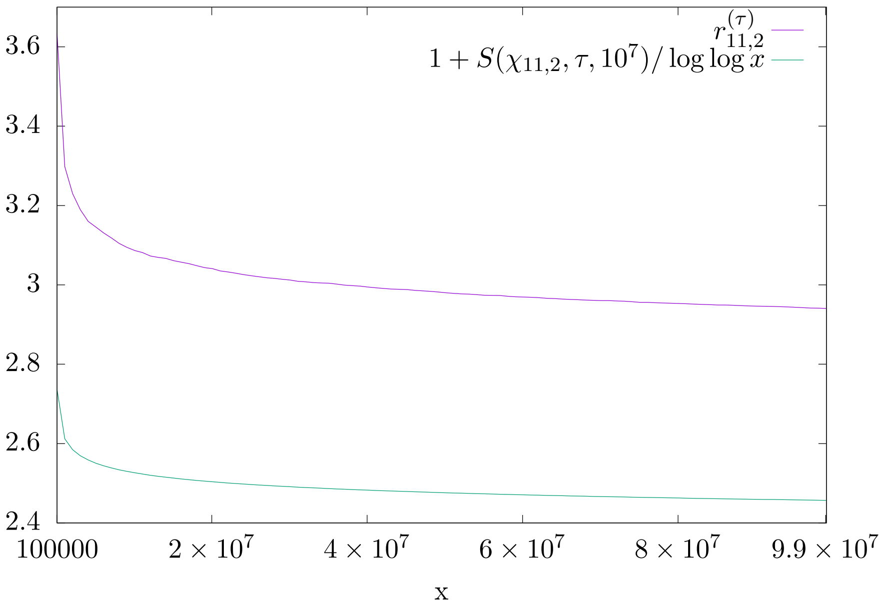
Obrázek 4.5: Srovnání průběhu $r_{7,2}^{(-\omega^2)}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{7,2}, -\omega^2, 10^7)}{\log\log x}$.



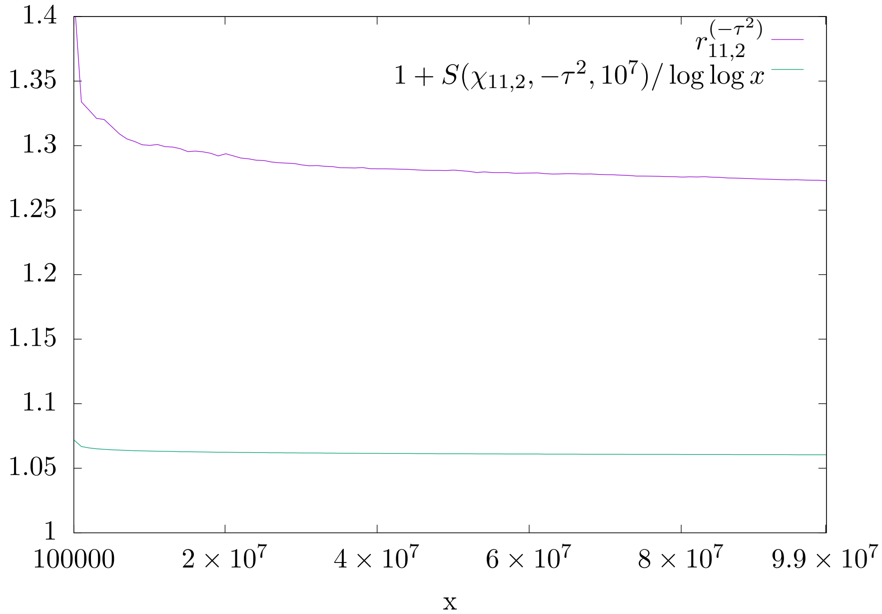
Obrázek 4.6: Srovnání průběhu $r_{7,2}^{(-1)}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{7,2}, -1, 10^7)}{\log\log x}$.



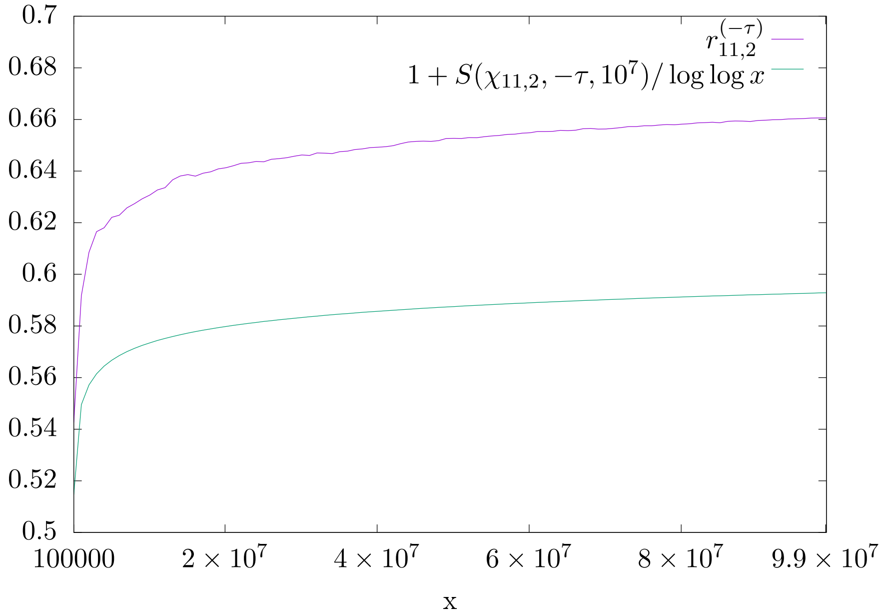
Obrázek 4.7: Srovnání průběhu $r^{(1)}_{11,2}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{11,2},-1,10^7)}{\log\log x}$.



Obrázek 4.8: Srovnání průběhu $r^{(\tau)}_{11,2}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{11,2},\tau,10^7)}{\log\log x}$.



Obrázek 4.9: Srovnání průběhu $r_{11,2}^{(-\tau^2)}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{11,2}, -\tau^2, 10^7)}{\log\log x}$.



Obrázek 4.10: Srovnání průběhu $r_{11,2}^{(-\tau)}(x)$ a $1 + \frac{S(\chi_{11,2}, -\tau, 10^7)}{\log\log x}$.

Závěr

V práci jsme se zabývali podrobným zpracováním výsledku z [2] a jeho zobecněním pro případ obecných Dirichletových charakterů. Konkrétně se podařilo dokázat platnost vztahu

$$\frac{\#\{pq \leq x \mid \chi(p) = c, \chi(q) = c, p \leq q\}}{\#\{pq \leq x \mid p \leq q\}} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 \log\log x} \sum_p \frac{\chi^{(c)}(p)}{p} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right),$$

kde c je nenulové komplexní číslo, kterého daný charakter χ pro nějaké prvočíslo nabývá, n značí počet všech vzájemně různých nenulových hodnot, kterých charakter nabývá a $\chi^{(c)}$ je aritmetická funkce definovaná v závislosti na c pro všechna přirozená a jako

$$\chi^{(c)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } \chi(a) = 0, \\ n-1 & \text{pokud } \chi(a) = c, \\ -1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

V [2] je tento výsledek dokázaný pro kvadratické charaktery. Ten je však konkrétním případem zobecněné verze pro $n = 2$, $c = 1, -1$ a explicitní odhad je v něm roven $\frac{1}{4} + \sum_p \frac{\chi(p)}{p}$. Aby bylo snadno poznat, co je v důkazu obecnější varianty vlastním přínosem, uvedli jsme v práci jak původní důkaz z článku tak jeho zobecnění. Dalším důvodem byla jeho přílišná stručnost v původním článku a oprava nepřesností ve výzkumném úkolu [3], kde byl tento důkaz citován. Ukázalo se, že zobecnění výsledku na tři prvočísla je technicky výrazně složitější a uvedli jsme tedy poměrně dlouhý náznak důkazu, který by šel jistě provést v celé úplnosti. Za hlavní přínos lze považovat určení explicitního odhadu $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 \log\log x} \sum_p \frac{\chi^{(c)}(p)}{p}$, jehož kvalitu jsme studovali v kapitole 4. Podrobnější numerická analýza byla provedena v závěru práce, včetně výpočtů pro speciální volby Dirichletova charakteru χ.

Zmíněný výsledek nabádá k zajímavé otázce, týkajícího se získaného odhadu. Pro určitou volbu Dirichletova charakteru a c by se mohlo stát, že by řada $\sum_p \frac{\chi^{(c)}(p)}{p}$ byla rovna nule a to by pro tento případ znamenalo řádově rychlejší konvergenci k $\frac{1}{n^2}$. Ačkoliv se to zdá nepravděpodobné, problém zatím zůstává otevřenou otázkou.

Reference

[1] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer, 1998.

[2] David Dummit, Andrew Granville, and Hershy Kisilevsky. Big biases amongst products of two primes. `http://arxiv.org/pdf/1411.4594v1.pdf`, 2014.

[3] Jakub Hlavnička. *Výzkumný úkol - Applications of L-functions in Analytic Number Theory.* Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2015.

[4] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory.* Cambridge University Press, 2012.

[5] Melvyn Bernard Nathanso. *Elementary Methods in Number Theory.* Springer, 2000.