

8. přednáška a cvičení (13. dubna 2009)

Co jsme dělali na přednášce?

Sekci 3.4 ze skript (trochu jinak, než je ve skriptech).

Co jsme dělali na cvičení?

Připomněli jsme si definici charakteru modulo n a to, že všechny charaktery s operací násobení tvoří grupu. Je-li p prvočíslo, má tato grupa $p-1$ prvků. Používali jsme značení $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ a definovali si Gaussův součet charakteru χ jako

$$g(\chi) = \sum_{t=1}^{p-1} \chi(t)\zeta^t.$$

Legendrův symbol také udává charakter modulo p definovaný $\chi(a) = \left(\frac{a}{p}\right)$, v tom případě mluvíme o kvadratickém charakteru nebo součtu.

Příklady

- 1. Popiš všechny charaktery modulo 5.
0. Buď χ netriviální charakter modulo prvočíslo p . Dokaž, že $\sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) = 0$.
1. Popiš všechny charaktery modulo 3.
2. Buď χ kvadratický charakter modulo 3. Spočti hodnotu $(g(\chi))^2$.
3. Dokaž, že $\sum_{a=0}^n \zeta_n^a = 0$.
4. Buď χ kvadratický charakter modulo 5. Spočti hodnotu $(g(\chi))^2$.
5. Popiš všechny charaktery modulo a) 7, b) 8, c) 15.
6. Buď p prvočíslo a a primitivní prvek modulo p . Dokaž, že a je kvadratický nezbytek modulo p .
7. Buď p prvočíslo, ε triviální charakter modulo p . Kolik je $g(\varepsilon)$?
8. Buď χ charakter modulo 5 splňující $\chi(2) = i$. Spočti $(g(\chi))^4$.
9. Buď p prvočíslo, $a \in \mathbb{Z}_p$. Dokaž, že $\sum \chi(a) = 0$ pro $a \neq 1$ a $\sum \chi(a) = p-1$ pro $a = 1$, kde v obou případech sčítáme přes všechny charaktery modulo p .