2. cvičení (1. 3. 2007)

Co jsme dělali?

Pověděli jsme si, co je to invertibilní a ireducibilní prvek a prvočinitel. Taky jsme si řekli, co je to obor integrity, co euklidovský obor integrity a co obor integrity hlavních ideálů. A dokázali jsme, že každý euklidovský obor integrity je také oborem integrity hlavních ideálů, z čehož vyplývá, že prvočinitel je totéž co ireducibilní prvek a také že každý prvek jde vyjádřit (víceméně) jednoznačně jako součin ireducibilních prvků.

A ještě jsme se dostali k tomu, co je to kongruence, a uvedli si jejich základní vlastnosti.

Příklady

-1. Dokaž, že $112|(835^5 + 6)^{18} - 1$.

0. $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) nejde vyjádřit jako součet čtverců (to znamená druhých mocnin) přirozených čísel.

1. Množina $S = 2\mathbb{Z}$ všech sudých celých čísel není okruh, protože $1 \notin S$. Přesto ale má cenu hovořit o ireducibilních prvcích a prvočinitelích. Popiš všechny ireducibilní prvky a prvočinitele S a najdi nějaký prvek S, který nemá jednoznačný rozklad na součin ireducibilních prvků.

2. Urči, kolik je $5^{20} \pmod{26}$.

3. Pro libovolná celá čísla a, b a prvočíslo p platí $a^p + b^p \equiv (a + b)^p \pmod{p}$.

4. Dokaž, že $7|37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ pro každé přirozené n.

5. Pro libovolná celá čísla a, b platí $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod 7$.

6. Dokaž, že $11|5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ pro všechna přirozená k, m, n.

Těžší příklady

1. $19 \cdot 8^n + 17$ je složené číslo.

2. Jde rozestavit na obvod kruhu čísla $1, 2, \dots, 12$ tak, aby pro libovolná 3 čísla a, b, c, která jsou v tomto pořadí vedle sebe, platilo $b^2 \equiv ac$ (mod 1)3.

3. Existuje takové přirozené číslo n, že číslo $4^n - 2^{n-1}$ je krychle (třetí mocnina celého čísla)?