7. cvičení (7. dubna 2006)

Co jsme dělali?

Povídali jsme si o grupách, řekli si, co je řád prvku grupy a jak z Lagrangeovy věty plyne Eulerova. Pak jsme pracovali s p-valuacemi; také se součiny grup, mluvili jsme o tom, co se v součinu děje se řády prvků a jejich p-valuacemi.

Také jsme se zabývali grupami $\mathbb{Z}_p$ je cyklická pro prvočíslo p; řešili jsme kongruence o jedné neznámé $ax \equiv b \pmod{m}$. Nakonec jsme si naznačili, jak spolu souvisí dvě ekvivalentní formulace čínské zbytkové věty (ta uvedená ve skriptech v sekci 2.7 a ta, která mluví o řešení soustavy kongruencí tvaru $x \equiv b_i \pmod{m}_i$).

Příklady

-1. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $29x \equiv 1 \pmod{17}$.

0. Dva bratři (jednomu bylo 5 a druhému 7 let) měli spravedlivě rozděleno několik hraček. Co ale čert nechtěl, narodila se jim sestřička. Až trochu vyrostla (a byly jí 3 roky), chtěla taky nějaké hračky, se kterými by si mohla hrát. Bratříčci byli hodní, a tak se chtěli se sestřičkou rozdělit. Ať to ale zkoušeli, jak jen chtěli, spravedlivě rozdělit hračky se jim nedařilo - vždy 2 zbyly. Kolik mohli mít celkem hraček?

1. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $21x + 5 \equiv 0 \pmod{29}$.

2. Nechť jsou A, B komutativní grupy, $a \in A$ má v A řád m, $b \in B$ má v B řád n a $(m, n) = 1$. Jaký je řád prvku (m, n) (ne největšího společného dělitele, ale příslušné uspořádané dvojice!) v $A \times B$?

3. Mějme prvočíslo p a přirozená čísla k_1, k_2, $a_1 \in \mathbb{Z}_{p^{k_1}}$, $a_2 \in \mathbb{Z}_{p^{k_2}}$. Jaký je (v závislosti na p-valuaci) řád a_i v $\mathbb{Z}_{p^{k_i}}$? Jaký je řád (a_1, a_2) v $\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{k_2}}$?

4. Vyřeš soustavu $x \equiv -3 \pmod{49}$, $x \equiv 2 \pmod{11}$.

5. Vyřeš soustavu $x \equiv 7 \pmod{33}$, $x \equiv 3 \pmod{63}$.

6. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Dokaž, že existuje k po sobě jdoucích přirozených čísla, z nichž každé je tvaru ab^n pro vhodná $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 1$.

Těžší příklady

1. Vyřeš kongruenci $(a + b)x \equiv a^2 + b^2 \pmod{ab}$, kde $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$.

2. Myslím si přirozené číslo $n, 1 \leq n < 100$. Pomocí 7 otázek na hodnotu $(n + c, d)$ pro tebou zvolená $c, d, 1 \leq c, d < 100$, zjisti, o jaké číslo jde!

3. Vyřeš $23941x \equiv 915 \pmod{3564}$.