

#### 4. proseminář (20. března 2007)

##### Co jsme dělali?

Řešili jsme kongruence - jednak lineární kongruenci  $ax \equiv b \pmod{m}$  a taky soustavu kongruencí tvaru  $x \equiv b_i \pmod{m}_i$ . O jejím řešení mluví čínská zbytková věta. Ta se dá také využít k řešení složitějších kongruencí (například té z 3. příkladu).

##### Příklady

-1. Najdi všechna celá čísla  $x$ , pro která platí  $58x \equiv 2 \pmod{34}$ .

0. Dva bratři (jednomu bylo 5 a druhému 7 let) měli spravedlivě rozděleno několik hraček. Co ale čert nechtěl, narodila se jim sestřička. Až trochu vyrostla (a byly jí 3 roky), chtěla taky nějaké hračky, se kterými by si mohla hrát. Bratříčci byli hodní, a tak se chtěli se sestřičkou rozdělit. Ať to ale zkusili, jak jen chtěli, spravedlivě rozdělit hračky se jim nedařilo - vždy 2 zbyly. Kolik mohli mít celkem hraček?

1. Najdi všechna celá čísla  $x$ , pro která platí  $21x + 5 \equiv 0 \pmod{29}$ .

2. Vyřeš soustavu  $x \equiv -3 \pmod{49}$ ,  $x \equiv 2 \pmod{11}$ ,  $3x \equiv 5 \pmod{7}$ .

3. Najdi všechna celá čísla  $x$ , pro která platí  $56x \equiv 1 \pmod{221}$ .

4. Pro která  $n \in \mathbb{N}$  platí  $3n + 4 \mid 7n + 1$ ?

5. Vyřeš soustavu  $2x \equiv 7 \pmod{33}$ ,  $x \equiv 3 \pmod{63}$ .

6. Nechť  $k, n \in \mathbb{N}$ . Dokaž, že existuje  $k$  po sobě jdoucích přirozených čísla, z nichž každé je tvaru  $ab^n$  pro vhodná  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 1$ .

7. Ať je  $p \equiv 3 \pmod{4}$  prvočíslo a  $a, b \in \mathbb{Z}$  jsou taková čísla, že  $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Dokaž, že  $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$ . (Nápověda: Dokazuj sporem; kongruenci převěď na kongruenci  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  a použij malou Fermatovu větu.)

##### Těžší příklady

1. Vyřeš  $23941x \equiv 915 \pmod{3564}$ .

2. Vyřeš kongruenci  $(a + b)x \equiv a^2 + b^2 \pmod{ab}$ , kde  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $(a, b) = 1$ .

3. Myslím si přirozené číslo  $n$ ,  $1 \leq n < 100$ . Pomocí 7 otázek na hodnotu  $(n + c, d)$  pro tebou zvolená  $c, d$ ,  $1 \leq c, d < 100$ , zjistí, o jaké číslo jde!