

1. proseminář (28. února 2008)

Co jsme dělali?

Mluvili jsme o tom, co to vlastně ta teorie čísel je, a zmínili se o několika významných tvrzeních (prvočíselná věta, velká Fermatova věta, Dirichletova věta o aritmetické posloupnosti, konstrukce pravidelného n -úhelníka, ...) a některých hypotézách (Goldbachova hypotéza, otázka existence nekonečně mnoha prvočíselných dvojčat, ...).

Příklady

1. Existuje nekonečně mnoho složených čísel tvaru $n^2 + n + 41$, kde n je přirozené číslo.
2. Odvoď kritérium dělitelnosti 9, 11 a 7.
3. Najdi všechny čtyřciferné čtverce (tedy druhé mocniny přirozeného čísla), které mají první dvě cifry stejné a poslední dvě taky (jejich desítkový zápis tedy vypadá \overline{aabb}).
4. Urči poslední cifru čísel 9^{9^9} a 2^{3^4} .
5. Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, je n prvočíslo.
6. Najdi všechna trojčíselná čísla \overline{abc} taková, že $\overline{abc}/11 = a^2 + b^2 + c^2$.
7. Každý nekonstantní polynom (s celočíselnými koeficienty, platí to ale i pro reálné koeficienty) nabývá nekonečně mnoha složených hodnot.
8. Existuje nekonečně mnoho složených čísel tvaru $n! + 1$.

Těžší příklady

1. Pro přirozené číslo n definujme $t(n) = (-1)^P$, kde P je počet jedniček v zápise čísla n ve dvojkové soustavě. Existuje nekonečně mnoho prvočísel takových, že $t(n) = 1$? Takových, že $t(n) = -1$?