7., 8. a nejspíš i 9. proseminář (3., 10. a 17. dubna 2007)

Co jsme dělali?

Řešili jsme diofantické rovnice (jde o rovnice, které se (nejčastěji) řeší v celých číslech), nejprve rovnici tvaru $\Sigma a_i x_i = b$ s neznámými x_i. Poté, jsme řešili složitější rovnice; uvedu zde postupy, které se při jejich řešení hodí (k řešení první skupiny příkladů by ti mohly stačit jen první 4 metody):

1) Jde-li jedna neznámá (případně nějaký složitější výraz) vyjádřit, vyjádři ji a zjisti, kdy je její hodnota celočíselná.

2) Počítej modulo vhodné malé číslo.

3) Zaveď vhodnou substituci.

4) Rozlož obě strany na součin a použij větu o jednoznačnosti rozkladu na součin prvočísel.

5) Použij nerovnosti.

6) Užitečná skutečnost je třeba tato: neexistují celá c, d a přirozené n taková, že $c^n < d^n < (c+1)^n$.

7) Počítej modulo i třeba trochu větší číslo.

8) Použij (Fermatovu) metodu nekonečného sestupu (z předpokladu existence nenulového řešení sestrojíme menší, také nenulové řešení. Takto bychom mohli pokračovat nekonečně dlouho a dostali bychom nekonečnou klesající posloupnost přirozených čísel - ta ovšem nemůže existovat!).

9) Uprav rovnici do tvaru $uv = a^n$, kde u, v jsou nesoudělná. Pak musí být $u = \pm b^n$, $v = \pm c^n$ pro vhodná b, c.

10) Počítej modulo něco obrovského.

11) Vymysli nějaký jiný trik.

Příklady

Není-li uvedeno jinak, je úkolem najít všechna celočíselná řešení dané rovnice či kongruence.

-2. $2x + 3y = 5$

-1. $2x^2 + 5y + 13 = 0$

0. $y^3 - x^3 = 91$

1. $5x + 7y = 8$

2. $18x + 20y + 15z = 1$

3. $15x - 12y + 48z - 51u = 1$

4. $x(x+3) = 4y - 1$

5. $(x-y)^2 = x + y$

6. $x(x+2y) = p + 3y^2$, p prvočíslo

7. $x + y + z = 14, x + yz = 18$

8. $4xy = x + y + z^2$ má nekonečně mnoho celočíselných řešení.

9. $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$

10. $x(y+1)^2 = 243y$

11. 2^n nejde vyjádřit jako součet několika (aspoň dvou) po soubě jdoucích přirozených čísel.

12. Všechna ostatní čísla tak vyjádřit jdou.

Druhá část příkladů

-2. $x^2 + 3y^2 = 14$

-1. $x^2 = y(y+2)$

0. $x^2 + y^2 = x^2y^2$
1. $6x^2 + 5y^2 = 74$
2. $2^x = 3 + 7y$
3. $3x^2 - 4y^2 = 13$
4. $x^3 = 2y^3 + 4z^3$
5. $(x+2)^4 - x^4 = y^3, x \geq 0$
6. $2^x = 1 + 3^y$
7. $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$
8. $x^3 + 2y^3 + 4y^3 = 6xyz$
9. $x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2$
10. $15x^2 - 7y^2 = 9$
11. $p^2 - 2q^2 = 1$, p, q prvočísla
12. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Těžší příklady
1. $2^{x+1} - 1 = y^{z+1}, x, y, z \in \mathbb{N}$
2. $x(x+1) = p^{2n}y(y+1), n \in \mathbb{N}$, p prvočíslo
3. $4xy = x + y + z^2, x, y, z \in \mathbb{N}$
4. $y^2 = x^3 + (x+4)^2$
5. Existuje nekonečně mnoho řešení rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$.
6. Pro $n \geq 3$ existují lichá x, y taková, že $2^n = 7x^2 + y^2$.
7. $x^2 + y^2 = 121^z$