3. proseminář (6. 3. 2007)

Co jsme dělali?

Definici prvočísla a tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho a že každé přirozené číslo jde vyjádřit (až na pořadí) jednoznačně jako součin prvočísel.

Definici dělitelnosti, největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku, větu o dělení se zbytkem a Euklidův algoritmus.

Dále Bezoutovu větu, podle níž pro každá a, b existují x a y taková, že $(a, b) = ax + by$, a taky postup, jak tato x a y najít za pomoci Euklidova algoritmu.

A nezapomněli jsme ani na tvrzení, že $n \cdot D = a \cdot b$, kde n je nejmenší společný dělitel čísel a, b a D jejich nejmenší společný násobek.

Příklady

0. Spočti $(84, 33)$ a najdi $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $(84, 33) = 84x + 33y$.

1. Dokaž, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ nejde číslo $6n + 5$ vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

2. Najdi všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že obě čísla $2^n - 1, 2^n + 1$ jsou prvočísla.

3. Pro každé $n > 2$ existuje prvočíslo, které leží mezi n a $n!$.

4. Spočti $(156, 177)$ a najdi $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $(156, 177) = 156x + 177y$.

5. Každé číslo tvaru $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) je dělitelné nějakým prvočíslem tvaru $4l + 3$.

5,5. Spočti $(3^21 - 1, 3^13 - 1)$.

6. Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$.

7. Najdi všechna prvočísla p taková, že i číslo $2p^2 + 1$ je prvočíslo.

8. Pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \neq c$ platí $a - c | ab + cd$ právě tehdy, když $a - c | ad + bc$.

Těžší příklady

1. Kolik je $(2^n - 1, 2^m - 1)$?

2. Pokud pro přirozená čísla a, b, c, d platí $ab = cd$, pak je číslo $a^n + b^n + c^n + d^n$ složené.