10. proseminář (15. května 2007)

Co jsme dělali?

Mluvili jsme o nejrůznějších číselných funkcích - $\varphi(n)$ udává počet čísel $k, 1 \leq k \leq n$ nesoudělných s n; $d(n)$ je počet dělitelů čísla n (ovšem jen kladných; včetně 1 a n) a $\sigma(n)$ je součet všech dělitelů n. Také jsme si řekli, že číslo je perfektní, pokud $\sigma(n) = 2n$.

Je-li $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ rozklad n na součin prvočinitelů, je $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1}) \cdots (1-\frac{1}{p_k})$, $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ a $\sigma(n) = \prod(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i})$.

Příklady

1. $\sigma(n) = n + 1$, právě když je n prvočíslo.

2. Pro každé $k > 1$ existuje nekonečně mnoho čísel n takových, že $d(n) = k$.

3. Pro každé $k > 1$ takové, že $2^k - 1$ je prvočíslo, je číslo $2^{k-1}(2^k - 1)$ perfektní. (Platí i opačná implikace: každé sudé perfektní číslo je uvedeného tvaru; tu je ale trochu těžší dokázat.)

4. Je-li $2^k - 1$ prvočíslo, je i k prvočíslo.

5. Pro každé n platí $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.

6. Uvažujme posloupnost $n, d(n), d(d(n)), d(d(d(n))), \ldots$, $n > 1$. Dokaž, že od určitého členu počínaje jsou všechny její členy rovny 2.

7. Pro která n je $\sigma(n)$ liché číslo?

8. Najdi všechna n taková, že $d(n) = 10$.

9. Najdi všechna n, která se rovnají součinu všech svých vlastních dělitelů (tedy různých od 1 a n).

Těžší příklady

1. $\lim \frac{\sigma(n!)}{n!} = \infty$

2. Číslo n je praktické, jde-li každé číslo $\leq n$ vyjádřit jako součet některých dělitelů n. Dokaž, že pro každé $k > 1$ je číslo $2^{k-1}(2^k - 1)$ praktické.

3. Existuje nekonečně mnoho lichých n takových, že $\sigma(n) > 2n$.