1. proseminář (20. února 2007)

Co jsme dělali?

Tento proseminář se moc nepovedl a přišlo na něj celkem málo lidí, takže jsme na něj později téměř nenavazovali.

Definici dělitelnosti, největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku, větu o dělení se zbytkem a Euklidův algoritmus.

Dále Bezoutovu větu, podle níž pro každá a, b existují x a y taková, že $(a, b) = ax + by$, a taky postup, jak tato x a y najít za pomoci Euklidova algoritmu.

A nezapomněli jsme ani na tvrzení, že $n \cdot D = a \cdot b$, kde n je nejmenší společný dělitel čísel a, b a D jejich nejmenší společný násobek.

Příklady

0. Spočti (14, 35).

1. Pro která n $n+1|n^2+1$?

2. Součet čtverců (druhých mocnin) dvou po sobě jdoucích přirozených čísel dává zbytek 1 po dělení 4.

3. Spočti (252, 180). Najdi x, y tak, aby $(252, 180) = 252x + 180y$.

4. V závislosti na n urči $(2n-1, 9n+4)$.

5. Najdi všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že mezi čísly $n+1, n+2, \ldots, n+10$ je největší možný počet prvočísel.

6. Pro každé prvočíslo p a přirozené číslo $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ platí $p|\binom{p}{k}$.

7. Pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \neq c$ platí $a-c|ab+cd$ právě tehdy, když $a-c|ad+bc$.

8. Spočti $(2^{63}-1, 2^{98}-1)$.

9. Každé přirozené $n > 6$ jde napsat jako součet dvou nesoudělných čísel (různých od 1).

10. Pro každé $n > 2$ existuje prvočíslo, které leží mezi n a $n!$.

11. Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$.

Těžší příklady

1. Existuje nekonečně mnoho n takových, že $n|2^n + 1$.

2. Pro každé liché k a přirozené n platí $2^{n+2}|k^{2^n} - 1$.

3. Kolik je $(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1)$?

4. Najdi všechny trojice po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž každé je (aspoň první) mocninou prvočísla.

5. Pro každé $k > 1$ existuje nekonečně mnoho n takových, že $2^{2^n} + k$ je složené číslo. Jak je tomu pro $k = 1$?