

Zkouška z Úvodu do komutativní algebry 2024/2025

Víťa Kala

U zkoušky si každý vylosuje lehčí a těžší otázku (z různých kapitol přednášky). Otázky uvedené níže pokrývají všechnu probranou látku ze skript (která se zkouší), takže taky můžete ignorovat konkrétní otázky a prostě se naučit všechno.

Ke zdárnému složení zkoušky je třeba pro každou z otázek písemně zformulovat definice a tvrzení a nastínit příslušný důkaz (případně vysvětlit příklady). Samozřejmě je vhodné si na začátku (a potom průběžně) ujasnit, co přesně chci slyšet, případně se mě průběžně ptát na hinty. Při zkoušení se zaměřím na to, jestli opravdu rozumíte tomu, co říkáte: např. se tedy zeptám na to, proč platí některý krok důkazu, který byl ve skriptech označený za triviální (nebo který v nich ani nebyl explicitně zmíněn); *podrobněji jsem to vysvětloval na přednášce 2. 12.*

Po cca 30 minutách se podívám na sepsané alespoň základní definice a příslušná tvrzení. Po cca dalších 30 minutách čekám, že budete mít i (víceméně) nachystané důkazy, případně si nechám ještě něco dovysvětlit nebo dopřipravit. Déle než 2 hodiny bych jednoho člověka zkoušel opravdu nerad (takže po nejvýše $2 + \varepsilon$ hodinách zkoušení každý dostane známku podle toho, co zatím předvedl).

U všech otázek si představuju znalosti zhruba v rozsahu skript (+ schopnost dokázat lehčí tvrzení nechaná jako cvičení, včetně těch, jež byla za DŮ nebo na cvičeních); ovšem s výše zmíněným důrazem na to, jestli jste látku pochopili.

Pokud se nebude dařit teorie, můžu to zkusit zachránit dotazem na příklady.

Hrubý nástin známkování:

- 1: umí všechno, případně s několika málo drobnými chybami nebo hinty v důkaze
- 2: umí definice a formulace tvrzení a lehký nebo těžký důkaz, v látce se orientuje
- 3: umí definice a formulace tvrzení a orientuje se v nich, i když toho moc neumí dokázat
- 4: umí toho míň (např. neví skoro nic k některé z otázek)

Otázky budou zhruba vypadat takto; je ale možné, že je ještě nějak velmi lehce upravím.

1 Lehčí otázky

1. Věty o homomorfismu a izomorfismu
2. Charakterizace maximálních ideálů a prvoideálů
3. Charakterizace noetherovských modulů
4. Zornovo lemma a aplikace na existenci ideálů
5. Charakterizace celistvých prvků
6. Existence kořenového nadtělesa
7. Stupeň separability: multiplikativita a porovnání se stupněm rozšíření

8. Charakterizace separabilních rozšíření, separabilita v $V \supset U \supset T$
9. Normální a Galoisova rozšíření ve vztahu k rozkladovým nadtělesům
10. Abstraktní Galoisova korespondence
11. Základní vlastnosti Fix a Gal
12. Galoisova grupa pro $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) \supset \mathbb{Q}$
13. Charakterizace radikálu
14. Základní vlastnosti $V(S), I(X)$
15. Algebraické množiny jako průnik nadploch
16. Charakterizace ireducibilních algebraických množin
17. Celistvé prvky v $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$
18. Norma, stopa a invertibilní prvky v kvadratických tělesech
19. Ideály v kvadratických tělesech a dělitelnost
20. Norma ideálu

2 Těžší otázky

1. Hilbertova věta o bázi
2. Čínská zbytková věta
3. Rozšiřování homomorfismů mezi rozkladovými nadtělesy
4. Existence a jednoznačnost algebraického uzávěru
5. Separabilní konečná rozšíření jsou jednoduchá
6. $T = \text{Fix}(U, G)$. Vlastnosti $U \supset T$ („klíčová věta pro důkaz Galoisovy korespondence“)
7. Základní věta Galoisovy teorie
8. Tělesa konečně generovaná jako modul a okruh
9. Slabá Hilbertova věta o nulách
10. Hilbertova věta o nulách
11. Rozklad algebraické množiny na ireducibilní komponenty
12. Krácení ideálů v kvadratických tělesech
13. Prvoideály a faktorizace v kvadratických tělesech
14. Popis prvoideálů v kvadratických tělesech (formulace vět a jejich ilustrace na vhodném tělese $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$; lemma 4.19 s důkazem, jinak bez důkazů)