

Zkouška z Úvodu do komutativní algebry 2022/2023

Víťa Kala

U zkoušky si každý vylosuje lehčí a těžší otázku (z různých kapitol přednášky). Otázky uvedené níže pokrývají všechnu probranou látku ze skript (která se zkouší), takže taky můžete ignorovat konkrétní otázky a prostě se naučit všechno.

Ke zdárnému složení zkoušky je třeba pro každou z otázek písemně zformulovat definice a tvrzení a nastínit příslušný důkaz (případně vysvětlit příklady). Samozřejmě je vhodné si na začátku (a potom průběžně) ujasnit, co přesně chci slyšet, případně se mě průběžně ptát na hinty. Po cca 1 hodině se na sepsané podívám a případně si nechám ještě něco dovysvětlit nebo dopřipravit. Déle než 2 hodiny bych jednoho člověka zkoušel opravdu nerad (takže po nejvýše $2 + \varepsilon$ hodinách zkoušení každý dostane známku podle toho, co zatím předvedl).

U všech otázek si představuju znalosti zhruba v rozsahu skript (+ schopnost dokázat lehčí tvrzení nechaná jako cvičení, včetně těch, jež byla za DÚ nebo na cvičeních); viz také upřesnění v diskusním dokumentu.

Pokud se nebude dařit teorie, můžu to zkusit zachránit dotazem na příklady.

Hrubý nástin známkování:

- 1: umí všechno, případně s několika málo drobnými chybami nebo hinty v důkaze
- 2: umí definice a formulace tvrzení a lehký nebo těžký důkaz, v látce se orientuje
- 3: umí definice a formulace tvrzení a orientuje se v nich, i když toho moc neumí dokázat
- 4: umí toho málo

1 Lehčí otázky

1. Věty o homomorfismu a izomorfismu
2. Charakterizace maximálních ideálů a prvoideálů
3. OHI a gaussovskost
4. Charakterizace noetherovských modulů
5. Obsah polynomu a Gaussovo lemma
6. Zornovo lemma a aplikace na existenci ideálů
7. Charakterizace celistvých prvků
8. Existence kořenového nadtělesa
9. Stupeň separability: multiplikativita a porovnání se stupněm rozšíření
10. Charakterizace separabilních rozšíření, separabilita v $V \supset U \supset T$
11. Normální a Galoisova rozšíření ve vztahu k rozkladovým nadtělesům
12. Abstraktní Galoisova korespondence

13. Základní vlastnosti Fix a Gal
14. Galoisova grupa pro $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) \supset \mathbb{Q}$
15. Charakterizace radikálu
16. Základní vlastnosti $V(S), I(X)$
17. Algebraické množiny jako průnik nadploch
18. Charakterizace ireducibilních algebraických množin
19. Celistvé prvky v $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$
20. Norma, stopa a invertibilní prvky v kvadratických tělesech
21. Ideály v kvadratických tělesech a dělitelnost
22. Norma ideálu

2 Těžší otázky

1. Hilbertova věta o bázi
2. Ireducibilní prvky v $R[x]$ a gaussovskost $R[x]$
3. Čínská zbytková věta
4. Rozšiřování homomorfismů mezi rozkladovými nadtělesy
5. Existence a jednoznačnost algebraického uzávěru
6. Separabilní konečná rozšíření jsou jednoduchá
7. $T = \text{Fix}(U, G)$. Vlastnosti $U \supset T$ („klíčová věta pro důkaz Galoisovy korespondence“)
8. Základní věta Galoisovy teorie
9. Tělesa konečně generovaná jako modul a okruh
10. Slabá Hilbertova věta o nulách
11. Hilbertova věta o nulách
12. Rozklad algebraické množiny na ireducibilní komponenty
13. Krácení ideálů v kvadratických tělesech
14. Prvoideály a faktorizace v kvadratických tělesech
15. Popis prvoideálů v kvadratických tělesech (formulace vět a jejich ilustrace na vhodném tělese $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$; lemma 4.19 s důkazem, jinak bez důkazů)