Rozdělování pokladu mezi loupežníky

Vítězslav Kala

8. června 2016

Abstrakt

We discuss the problem of dividing a treasure among several thieves when we do not have an objective measure of the value of individual items in the treasure.

V nedávném čísle Rozhledů vyšel zajímavý článek [1] o tom, jak naprogramovat rozdělení pokladu mezi několik loupežníků, pokud víme cenu jednotlivých drahokamů a cihel zlata. Ovšem jak zná každý protřelý člen loupeživé bandy z vlastní zkušenosti, při rozdělování kořisti toto objektivní ocenění většinou nemáme, a co hůř, různí loupežníci si cení různých částí lupu jinak: Ali je jako vždycky na smaragdy, Baba nedá dopustit na zlato a Kásim s Mardžánou si zálibně prohlížejí bednu whiskey. Zformulujme si tento problém ještě jednou pořádně:

Jak rozdělit velký poklad mezi n loupežníků tak, aby každý z nich měl jistotu, že bude se svým dílem spokojený, nezávisle na chování ostatních? Loupežník je spokojený, pokud má pocit, že získal alespoň jednu n-tinu pokladu (podle svého subjektivního ocenění). Naopak pro zjednodušení oproti původní úloze [1] předpokládáme, že poklad jde dostatečně dělit.

Skoro každý, kdo má jednoho sourozence, nejspíš někdy tento problém řešil, když se museli rozdělit o zákusek. Postup v tomto případě $n = 2$ je jednoduchý – jeden z nich zákusek rozdělí na dvě poloviny a ten druhý si vybere, kterou půlku chce.

Už ale když jsou děti nebo loupežníci tři, je situace o dost složitější. Člověku by se třeba mohlo zdát, že postup „Loupežník Ali poklad rozdělí na třetiny, jednu z nich si vybere Baba, a pak si jednu vybere Kásim.“ bude fungovat. Jenže Ali s Babou se můžou smluvit proti Kásimovi na tom, že Ali poklad rozdělí na dvě hodně malé „třetiny“ a na velký zbytek. Ten si pak vybere Baba a později se o něj stranou podělí s Alim – a chudák Kásim dostane jen jednu z malých částí.

Než budete číst dál, milí čtenáři, schválně se zkuste sami zamyslet nad tím, jak byste poklad dělili! Není to tak jednoduché, jak by se mohlo zdát; s kamarádem Kriketem jsme na středoškolských soustředěních vyhráli spoustu čokolády odhalováním chyb ve strategiích, které navrhli ostatní.

Už jste to vymysleli? Jeden postup, který funguje v případě tří loupežníků, je tento: Ali s Babou si napřed rozdělí poklad na poloviny tak, jako sourozenci. Každý z nich pak svůj díl rozdělí na třetiny a vždycky jednu z těchto třetin si od každého z nich vybere Kásim.

Ali s výsledným rozdělením bude spokojený: po dělení s Babou měl aspoň jednu polovinu pokladu, tu sám rozdělil na spravedlivé třetiny, z nichž mu dvě zbyly. Celkově má tedy aspoň $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ celého pokladu. Stejně je na tom i Baba.

Z pohledu Kásima si Ali s Babou poklad rozdělili na dvě části velikostí A a B. Z každé z těchto částí si pak Kásim vybral největší třetinu, má tedy aspoň $\frac{A}{3} + \frac{B}{3} = \frac{1}{3}$ pokladu.

A to, jak si poklad spravedlivě rozdělí víc loupežníků, už zvládnete vymyslet sami! Nabízí se ale i obtížnější problém: Jaký je nejmenší počet částí, na které je potřeba poklad rozdělit během spravedlivého dělení mezi n loupežníků? Náš postup pro tři lupiče vyžadoval šest částí – nestačilo by jich míň?

Vítězslav Kala
Katedra algebry, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
Sokolovská 83, 18600 Praha 8
vita.kala@gmail.com

Reference

[1] Stanislav Trávníček, Rozdělení na části, Rozhledy matematicko-fyzikální 91 (2016), č. 1, str. 13 – 18