Úvod do teorie grup: Domácí úkol 3

Termín odevzdání: 20. prosince 2021 do 9:00

1. Buď G netriviální konečná grupa. Dokažte následující tvrzení:

   a) Pokud je G řešitelná, pak existuje abelovská podgrupa $1 \neq H \trianglelefteq G$.

   b) Pokud G není řešitelná, pak existuje podgrupa $1 \neq H \trianglelefteq G, H = H'$.

2. Uvažujme grupu kvaternionů Q_8. Spočtěte derivovanou řadu $Q_8^{(n)}$, horní centrální řadu $\zeta_i(Q_8)$ a dolní centrální řadu $\gamma_j(Q_8)$. Zdůvodněte, jestli je Q_8 nilpotentní a řešitelná.

3. Buď G grupa řádu $3^3 \cdot 5$. Ukažte, že:

   (a) G je nilpotentní,

   (b) $\zeta_2(G) = G$.

   Poznámka: V části b) budou částečnými body odměněna i řešení, která zvládnou dokázat pouze slabší tvrzení $\zeta_4(G) = G$.

4. Dokažte větu 4.6 z přednášky:

   Ať p je prvočíslo, $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m$, $1 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n$ přirozená čísla. Pokud $\bigoplus \mathbb{Z}_{p^{a_i}} \simeq \bigoplus \mathbb{Z}_{p^{b_j}}$, pak $n = m$ a $a_i = b_i$ pro všechna i.

Každá úloha je za 5 bodů. O řešení příkladů se můžete bavit se spolužáky (a s vyučujícími), ale řešení sepište sami.

Řešení prosím odevzdejte buď papírově na začátku cvičení, nebo emailem Martinu Raškovi `raska.martin@gmail.com`.