Úvod do teorie grup: Cvičení 9

29. listopadu 2021

1. Pro grupu G ukažte, že NTJE: a) G je abelovská; b) $\zeta_1(G) = G$; c) $\gamma_1(G) = 1$.
2. Pro grupu G důkladně dokažte, že $\gamma_i \trianglelefteq G$, $\gamma_i \geq G^{(i)}$, $\gamma_{i+1} \leq \gamma_i$.
3. Spočtěte řady γ_i, ζ_j pro grupy
   a) D_8, b) S_n, c) $D_8 \times \mathbb{Z}_2$, d)* D_{16}, e)** $GL_n(T)$ $n \geq 3$.
4. Pro následující grupy rozhodněte, zda jsou nilpotentní:
   a) S_n, b) $\mathbb{Z}_2 \times S_n$, c) $D_8 \times G$, kde G je abelovská
5. Ukažte, že každá konečná p-grupa je nilpotentní.
6. Ať G, H jsou grupy. Pak
   a) $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$,
   b) $\zeta_i(G \times H) = \zeta_i(G) \times \zeta_i(H)$,
   c) Jsou-li G, H jsou nilpotentní, pak je $G \times H$ také nilpotentní.
7. Ukažte, že každá grupa řádu 35 je nilpotentní.
8. Co nejexplicitněji rozepište, jaké prvky leží v $\zeta_2(G)$.

Další příklady:

9. Najděte příklad grupy, která není nilpotentní, ale je izomorfní semidirektního součinu nilpotentních grup.
10. Důkladně dokažte: $\zeta_i \trianglelefteq G$, $\zeta_{i+1} \geq \zeta_i$, $\zeta_{i+1}/\zeta_i \leq Z(G/\zeta_i)$.
11. Dokažte, že podgrupa a faktor nilpotentní grupy jsou taky nilpotentní grupy.
12. Dokažte druhou implikaci věty 3.11, čili: Pokud je $\gamma_n(G) = 1$, pak $\zeta_n(G) = 1$.
13. Ukažte, že každá grupa řádu $3^3 \cdot 5 \cdot 17$ je nilpotentní.
14. Pro která $\pi \subset \{2, 3, 5\}$ má grupa A_5 Hallovu π-podgrupu?

$*$ 15. Buď G konečná, $K \trianglelefteq G$ a S Sylowova p-podgrupa v K. Pak $G = KN_G(S)$.

16. Viz Rotman 5.13 (str. 101)

Hinty:
Obecně: Pokud nevíte, postupujte podle definic.
5. Jak je velké centrum p-grupy?
7. Jak vypadají Sylowovy p-podgrupy?
9. Co takhle nejmenší nekomutativní?
12. Indukcí podle i dokažte $\gamma_{n-i} \leq \zeta_i$.
13. Použijte charakterizaci nilpotentních grup za pomocí Sylowových podgrup.