Úvod do teorie grup: Cvičení 8

22. listopadu 2021

1. $Z(G)\operatorname{char} G$.

2. Grupa D_{2n} je řešitelná.

3. Ať G je grupa a) $\mathbb{Z}_{10}$, b) $\mathbb{Z}_{18}$, c) S_5, d) Q_8.
   Nakreslete obrázek uspořádané množiny všech podgrup grupy G. Najděte v něm všechny
   i) subnormální, ii) kompoziční, iii)* normální, iv)* hlavní
   řady a ověřte platnost Jordan–Hölderovy věty.

4. Určete derivovanou řadu (čili $G' \geq G'' \geq \cdots \geq G^{(n)} \geq \dots$) grupy
   a) $\mathbb{Z}_{15236}$, b) S_3, c) D_8, d) Q_8.

5. Každá grupa řádu n je řešitelná, kde n je
   a) 100, b) pq^2, c)* 1000, d)* pq^k, e)* < 30, f)* < 60
   pro prvočísla $p < q$ a $k \in \mathbb{N}$.

6. a) Ať $H \operatorname{char} K$ a $K \operatorname{char} G$. Pak $H \operatorname{char} G$.
   b) Ať $H \operatorname{char} K$ a $K \trianglelefteq G$. Pak $H \trianglelefteq G$.

7. Buď G abelovská jednoduchá grupa. Pak $G \simeq \mathbb{Z}_p$ pro nějaké prvočíslo p.
   (Rozmyslete si, že totéž platí i pro řešitelné jednoduché grupy.)

Další příklady:

8. G' je úplně charakteristická podgrupa G.

9. Ať $U \trianglelefteq U^* \leq G$ a $V \trianglelefteq G$. Pak $VU \trianglelefteq VU^*$.

10. Všechny grupy lichého řádu jsou řešitelné, právě když všechny neabelovské konečné jednoduché grupy mají sudý řád.

11. a) Jsou-li G, H řešitelné grupy, pak je řešitelný i součin $G \times H$.
    b) Rozmysletete si důkaz částí a) – c) tvrzení 3.8 z přednášky. *Případně viz skripta z Algebry.*

Hinty:
2. Najděte vhodnou subnormální řadu.
4. Místo přímého výpočtu někdy může pomoct obrázek podle 3.
5. Dokažte, že nějaká Sylowova podgrupa je normální. V částech e), f) probírejte možné řády grup; u většiny řádů jdou použít obecné výsledky jako d).