Úvod do teorie grup: Cvičení 6

1. listopadu 2021

1. Rozmyslete si, že jediné dva netriviální semidirektní součiny řádu 6 jsou $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$. Ukažte, že $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$ je izomorfní buď $\mathbb{Z}_6$, nebo S_3.

2. Ukažte, že každé dva trojcykly jsou konjugované v A_n pro $n \geq 5$.

3. Ať $n \geq 5$, $N \trianglelefteq A_n$. Ukažte, že $N = A_n$, pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek

   (a) N obsahuje nějaký trojcyklus,
   (b) N obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápise cyklus délky alespoň 4,
   (c) N obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápise alespoň dva trojcykly,
   (d) N obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápise právě 1 trojcyklus,
   (e) N obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápise pouze dvojcykly.

   Vyvoďte z předchozích bodů, že pro $n \geq 5$ je A_n jednoduchá.

4. Ukažte, že pro $n \neq 4$ je A_n jediná vlastní normální podgrupa S_n. (Pro $n = 4$ je normální ještě K_4 z cv. 2.4.)

5. Rozmyslete si, že netriviální semidirektní součin řádu 8 je součinem grupy řádu 2 a grupy řádu 4 (v nějakém pořadí). Se znalostí charakterizace grup řádu 2 a 4 (viz cv. 1.5) je pomocí následujících bodů všechny charakterizujte:

   (a) Ukažte, že $\mathbb{Z}_2 \rtimes H$ vyjde pro libovolnou grupu H rovno $\mathbb{Z}_2 \times H$.
   (b) Ukažte, že jediný netriviální součin $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ je izomorfní D_8.
   (c) Ukažte, že všechny netriviální součiny $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_2$ jsou izomorfní D_8.

Další příklady:

6. Se znalostí všech grup řádů 2 až 6 charakterizujte všechny netriviální semidirektní součiny řádu 12:

   (a) Znovu si rozmyslete, že $\mathbb{Z}_2 \rtimes H$ vyjde vždy triviální.
   (b) Ukažte, že jediný netriviální součin $\mathbb{Z}_6 \rtimes \mathbb{Z}_2$ je izomorfní D_{12}.
   (c) Ukažte, že všechny netriviální součiny $S_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$ jsou izomorfní D_{12} a rovněž $S_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong D_{12}$.
   (d) Ukažte, že všechny součiny $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_3$ jsou triviální.
   (e) Ukažte, že všechny součiny $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_3$ jsou izomorfní A_4.
   (f) Ukažte, že všechny netriviální součiny $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^2$ jsou izomorfní D_{12}.
   (g) Ukažte, že existuje jediný netriviální součin $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$. (Tato grupa má někdy označení *dicyclic group*.) Dokažte, že není izomorfní žádné z předchozích grup.

7. Ukažte, že A_5 neobsahuje podgrupu řádu 30.

8. Nechť jsou p, q různá prvočísla. V závislosti na jejich velikostech určete všechny semidirektní součiny (a) $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$, (b) $\mathbb{Z}_{p^2} \rtimes \mathbb{Z}_q$, (c)* $\mathbb{Z}_p^2 \rtimes \mathbb{Z}_q$.

9. Ukažte, že $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2 \cong D_8$. [definice věncového součinu $\wr$ viz Rottman, str. 172]

10. Buď n, k přirozená čísla a označme $t_k = n(n-1)\cdots(n-2k+1)/(k! \cdot 2^k)$. Pro $n \neq 6$ ukažte, že $t_1 \neq t_k$ pro všechna $k > 1$.

Hinty:

2. Uvažte konjugaci v S_n, případným přidáním transpozice získejte konjugaci prvkem A_n.

3. Pokud si permutaci ze zadání označíme σ, tak typicky bude zajímavý prvek $\sigma^{-1}(\delta\sigma\delta^{-1}) \in N$ pro vhodný trojcyklus δ, 3c) Pro $\sigma = (123)(456)\tau$ uvažujte např. $\delta = (142)$, 3d) Zkuste σ^2.

4. Uvažujte průnik s A_n.

8. Uvažte řády a dělitelnosti. U a), b) vyjdou všechny netriviální součiny izomorfní. V (c) ukažte, že dva semidirektní součiny jsou isomorfní právě tehdy, když jejich obrazy $\mathbb{Z}_q$ jsou v $Aut(\mathbb{Z}_p^2)$ konjugované podgrupy.